Вариационное исчисление. Семинар 6 мая.

7 мая 2020 г.

1 Задача 196 (Краснов).

Составить канонические уравнения Эйлера для функционала

$$J[y_1, y_2] = \int_1^2 (y'^2 + y_2^2 + y'^2_2)dx. \tag{1}$$

Решение:

Проверим, что для данного функционала возможно ввести систему переменных $p_1,\ p_2$, а именно, что отличен от нуля определитель $\begin{vmatrix} F''_{y'_1 y'_1} & F''_{y'_1 y'_2} \\ F''_{y'_2 y'_1} & F''_{y'_2 y'_2} \end{vmatrix}$.

Действительно,

$$\begin{vmatrix} F''_{y'_1 y'_1} & F''_{y'_1 y'_2} \\ F''_{y'_2 y'_1} & F''_{y'_2 y'_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Следующим шагом введем переменные

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial y'_1} = 2y'_1, \qquad p_2 = \frac{\partial F}{\partial y'_2} = 2y'_2.$$

Это дает нам возможность выразить переменные $y'_i,\ i = 1, 2$ как функции $x, \vec{y}, \vec{p}$:

$$y'_1 = \frac{p_1}{2}, \qquad y'_2 = \frac{p_2}{2}.$$

Теперь можно построить функцию Гамильтона

$$-H = F - \sum_{i=1}^{2} y'_i F'{}_{y'_i} = \frac{p_1^2}{4} + y_2^2 + \frac{p_2^2}{4} - \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2} = -\frac{p_1^2}{4} - \frac{p_2^2}{4} + y_2^2.$$

Теперь построим систему канонических уравнений Эйлера

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = y'_1,$$
$$\frac{\partial H}{\partial y_1} = -p'_1,$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_2} = y'_2,$$
$$\frac{\partial H}{\partial y_2} = -p'_2.$$

Эта система в случае задачи (1) выглядит следующим образом:

$$\frac{p_1}{2} = y'_1,$$
$$p'_1 = 0,$$
$$\frac{p_2}{2} = y'_2,$$
$$2y_2 = p'_2.$$

Задача решена.

2 Задача 200, (Краснов).

Найти экстремали функционала:

$$J[y] = \int_1^e xyy'^2 dx,$$

$$y(1) = 0, \quad y(e) = 1. \tag{2}$$

Решение:

Проверим, что возможно ввести переменную p и воспользоваться методом Гамильтона-Якоби:

$$F''_{y'y'} = 2xy \neq 0.$$

Тогда

$$p = \frac{\partial F}{\partial y'} = 2xyy' \quad \rightarrow \quad y' = \frac{p}{2xy}.$$

Функция Гамильтона принимает вид

$$H = -F + y'F'_{y'} = -xyy'^2 + 2y'^2xy = xyy'^2 = \frac{p^2}{4xy}.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -H = -\frac{1}{4xy}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2. \tag{3}$$

Следующим шагом мы делим переменные в уравнении Гамильтона-Якоби:

$$4x\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{1}{y}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 = -C. \tag{4}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{C}{4x}, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \sqrt{Cy}.$$

Зная все частные производные, мы можем составить полный интеграл выражения

$$\Theta = -\int \frac{C}{4x}dx + \int \sqrt{Cy}dy. \tag{5}$$

Воспользуемся, наконец, теоремой Якоби

$$\frac{\partial \Theta}{\partial C} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2\sqrt{C}}\int \sqrt{y}dy = \gamma, \tag{6}$$

где γ - некоторая константа.

После взятия интегралов перепишем выражение (6) в виде

$$-\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{3\sqrt{C}}y^{3/2} = \gamma. \tag{7}$$

Фактически, мы получили уравнение экстремали в терминах двух постоянных C и γ.

Теперь воспользуемся граничными условиями (2) для того, чтобы зафиксировать C и γ.

$$y(1) = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = 0,$$

$$y(e) = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{3}{4}.$$

Уравнение экстремали (7) принимает вид

$$y^{3/2} = \ln|x|.$$

3 Задача 203, (Краснов)

Найти функцию поля $p(x, y)$ и само поле экстремалей, проходящих через начало координат, функционала

$$J[y] = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx, \qquad y > 0.$$

Решение:

Функция Лагранжа в данном случае не зависит явно от переменной x, поэтому первый интеграл уравнения Эйлера имеет вид:

$$F - y'F'_{y'} = C \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = C.$$

Выразим отсюда y':

$$y' = \pm \frac{\sqrt{C_1 - y^2}}{y}.$$

Интегрируя полученное выражение, приходим к выводу, что

$$y^2 + (x - C_3)^2 = C_1. \tag{8}$$

Мы получили семейство окружностей, центры которых принадлежат оси OX. Из условия

$$y(0) = 0$$

следует связь $C_1 = C_3^2$. Таким образом,

$$y^2 + (x - C_3)^2 = C_3^2.$$

Помня про условие $y > 0$, получаем

$$y = \sqrt{2xC_3 - x^2}. \tag{9}$$

Введем поле p по определению

$$p = F'_{y'} = \frac{1}{y} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}. \tag{10}$$

Из уравнения (9) следует, что

$$y' = \frac{C_3 - x}{y}.$$

Отсюда выражение для поля $p(x, y)$ принимает вид

$$p(x, y) = \frac{C_3 - x}{yC_3}. \tag{11}$$

Наконец, выражая постоянную C_3 из уравнения (9)

$$C_3 = \frac{x^2 + y^2}{2x},$$

получаем окончательно

$$p(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{y(x^2 + y^2)}. \tag{12}$$

4 Задача 212, (Краснов)

Найти траекторию движения точки в плоскости под действием силы отталкивания от оси OX, пропорциональной расстоянию точки до этой прямой и направленной параллельно оси OY при условии, что

$$v^2 - y^2 = 0,$$

исходя из интеграла движения

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2} dx.$$

Решение:

Принцип наименьшего действия, определяющий траекторию движения материальной точки в классической механике, сводится к поску экстремума минимума функционала

$$J[y] = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)dt, \tag{13}$$

где T и V соответственно кинетическая и потенциальная энергии материальной точки. Из условия задачи известно, что

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = ky.$$

Отсюда

$$V = -\frac{k}{2}y^2.$$

Но кинетическая энергия $T = \frac{mv^2}{2}$. Следовательно, из условия связи получаем

$$v^2 = y^2 \qquad \to \qquad V = \alpha T.$$

С другой стороны, условие связи и потенциал не зависят от времени t. Поэтому полная энергия E сохраняется (первый интеграл уравнения Эйлера). Следовательно,

$$(T - V)dt = (T - (E - T))dt = (2T - E)dt.$$

Принебрегая в функции Лагранжа постоянным слагаемым, получаем

$$\tilde{F}dt = 2Tdt = \sqrt{2T}\sqrt{2T}dt = vds = y\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Мы воспользовались здесь соотношениями (при $m = 1$)

$$\sqrt{2T} = v, \qquad \sqrt{2T}dt = vdt = ds = \sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Задача свелась к минимизации функционала действия

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}dx$$

с функцией Лагранжа $F = y\sqrt{1 + y'^2}$. Решим задачу нахождения траектории движения материальной точки (экстремали функционала) методом Гамильтона-Якоби.

Проверив, что $F''_{y'y'} \neq 0$, введем переменную p согласно определению

$$p = F'_{y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Отсюда мы получаем, что

$$y' = \pm\frac{p}{\sqrt{y^2 - p^2}}. \tag{14}$$

Введем теперь функцию Гамильтона

$$-H = F - y'F'_{y'} = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = \pm\sqrt{y^2 - p^2}.$$

Мы приняли здесь во внимание уравнение (14). В этих терминах уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -H = \pm\sqrt{y^2 - p^2} = \pm\sqrt{y^2 - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2}. \tag{15}$$

Разделение переменных в уравнении (15) приводит к следующему результату

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 = y^2 - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 = C^2. \tag{16}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = C, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \pm\sqrt{y^2 - C^2}.$$

Восстановим теперь Θ как интеграл по контуру (ломаная, отрезки которой параллельны координатным осям) от полного дифференциала

$$\Theta = \int C dx \pm \int \sqrt{y^2 - C^2} dy. \tag{17}$$

Функция Θ восстанавливается здесь с точностью до константы. Интегралы в выражении (17) мы можем понимать как неопределенные. Применяя теорему Якоби, получаем:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial C} = \int dx \mp \int \frac{C dy}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \gamma, \tag{18}$$

где γ – новая постоянная. Уравнение (18) представляет собой уравнение траектории материальной точки:

$$x \mp C \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \gamma. \tag{19}$$

Интеграл в выражении (19) нетрудно посчитать с помощью замены переменной $y = C \cosh t$. В этих терминах

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \int \frac{C \sinh t dt}{C \sinh t} = t = arccosh(y/C).$$

Подставляя плученное выражение в уравнение (19), получаем

$$y = C \cosh \left(\frac{x - \gamma}{C} \right).$$

Уравнение траектории материальной точки получено. Оно представляет собой цепную линию.