Вариационное исчисление. Семинар 8 апреля.

8 апреля 2020 г.

1 Вариационное исчисление. Кратные интегралы и зависимость от функции Лагранжа от старших производных.

1.1 Задача 107 (задачник Краснова)

Найти экстремали функционала

$$J[y,z] = \int_0^{\pi/2} ({y'}^2 + {z'}^2 - 2yz)dx, \tag{1}$$

удовлетворяющие следующим граничным условиям

$$y(0) = 0, \qquad y(\pi/2) = 1, \qquad z(0) = 0, \qquad z(\pi/2) = 1. \tag{2}$$

Решение.

Функция Лагранжа в данной задаче зависит от пары функций y и z:

$$F = {y'}^2 + {z'}^2 - 2yz. \tag{3}$$

Рассмотрим систему уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Подставляя выражение для функции Лагранжа (3) в систему уравнений (4), получаем

$$\begin{cases} -2y - 2z'' = 0, \\ -2z - 2y'' = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Продифференцируем дважды первое из уравнений (5):

$$z^{IV} + y'' = 0$$

и воспользуемся вторым уравнением в (5): $y'' = -z$. В результате придем к однородному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами относительно функции $z(x)$.

$$z^{IV} - z = 0. \tag{6}$$

Характеристическое уравнение $\rho^4 - 1 = 0$, отвечающее уравнению (6), имеет четыре корня

$$\rho_{1,2} = \pm 1, \qquad \rho_{3,4} = \pm i.$$

Запишем общее решение уравнения (6) в виде

$$z(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + C_3\cosh(x) + C_4\sinh(x). \tag{7}$$

Первое из уравнений (5) $y = -z''$ позволяет найти функцию $y(x)$:

$$y(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - C_3\cosh(x) - C_4\sinh(x). \tag{8}$$

Воспользуемся набором граничных условий (2). Из первого и третьего условия следует:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 - C_3 = 0,$$

$$z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_3 = 0.$$

Отсюда получаем, что $C_1 = C_3 = 0$. Второе и четвертое из условий (2) приводят к следующему результату:

$$y(\pi/2) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 - C_4 \sinh\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$z(\pi/2) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 + C_4 \sinh\frac{\pi}{2} = 1.$$

Окончательно: $C_4 = 0, \quad C_2 = 1$.

Возвращаясь к представлениям (7)-(8), получаем

$$y(x) = \sin(x), \qquad z(x) = \sin(x). \tag{9}$$

Экстремали получены.

1.2 Задача 108 (задачник Краснова)

Найти экстремали функционала

$$J[y,z] = \int_0^1 ({y'}^2 + {z'}^2 + 2y)dx, \tag{10}$$

удовлетворяющие следующим граничным условиям

$$y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{3}{2}, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 1. \tag{11}$$

Решение.

Функция Лагранжа в данной задаче зависит от пары функций y и z:

$$F = {y'}^2 + {z'}^2 + 2y. \tag{12}$$

Рассмотрим систему уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Подставляя выражение для функции Лагранжа (12) в систему уравнений (13), получаем

$$\begin{cases} y'' = 1, \\ z'' = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Дважды интегрируя полученные уравнения, найдем:

$$z(x) = C_1 x + C_2, \qquad y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_3 x + C_4. \tag{15}$$

Воспользуемся граничными условиями (11)

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 1,$$

$$y(1) = \frac{3}{2}, \quad \Rightarrow \quad C_3 = 0,$$

$$z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$Z(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1.$$

Возвращаясь к представлениям (15), получим

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1, \quad z(x) = x.$$

Экстремали получены.

1.3 Задача 110 (задачник Краснова)

Написать уравнение Эйлера-Остроградского для функционала

$$J[z(x,y)] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^4 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^4 + 12zf(x,y) \right] dxdy. \tag{16}$$

Решение.

В нашем случае функция Лагранжа

$$F = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^4 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^4 + 12zf(x,y) \tag{17}$$

зависит от переменных x, y (некоторая известная зависимость $f(x,y)$), от функции $z(x,y)$ и от частных производных функции z первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$.

В этом случае уравнение Эйлера-Остроградского имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z'_y} = 0. \tag{18}$$

Подставим явное представление для функции Лагранжа (17) в уравнение (18)

$$12f(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} 4 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3 - \frac{\partial}{\partial y} 4 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3 = 0. \tag{19}$$

Упрощая выражение (19), получим

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 z''_{xx} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 z''_{yy} = f(x,y).$$

Уравнение Эйлера-Остроградского получено.

1.4 Задача 111 (задачник Краснова)

Написать уравнение Эйлера-Остроградского для функционала

$$J[z(x,y)] = \iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 dxdy. \tag{20}$$

Решение.

В данном случае функция Лагранжа $F = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2$ зависит от частных производных второго порядка функции $z(x,y)$, а именно от $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Уравнение Эйлера-Остроградского в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z'_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial z''_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial z''_{yy}} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial z''_{xy}} = 0. \tag{21}$$

Отметим, что только четвертое и пятое слагаемые в уравнении (21) отличны от нуля. Все остальные слагаемые обращаются в ноль, поскольку функция Лагранжа не содержит явной зависимости от функции $z(x,y)$, от частных производных функции $z(x,y)$ первого порядка, а также от смешанной производной функции $z(x,y)$ второго порядка.

Это означает, что мы можем переписать уравнение (21) после подстановки в него функции Лагранжа в следующем виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{22}$$

Введя обозначение

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

можем переписать уравнение (22) в следующем виде:

$$\Delta\Delta z = 0.$$

Уравнение Эйлера-Остроградского получено.

1.5 Задача 113 (задачник Краснова)

Вывести дифференциальное уравнение минимальных поверхностей.

Решение.

Предположим, что уравнение некоторой поверхности σ в $\mathbb{R}^3$, заданной над двумерной ограниченной односвязной областью D в плоскости (X, Y), описывается уравнением $z = z(x, y)$. Пусть также известно уравнение простого контура Γ, который однозначно проецируется на границу области D. При этом поверхность σ опирается на пространственный контур Γ.

Мы знаем (зимний семестр), что площадь S поверхности σ вычисляется следующим образом

$$S = \int\int\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy. \tag{23}$$

Граничное условие принимает вид

$$z \Big|_{\partial D} = f. \tag{24}$$

Постановка задачи сводится к построению экстремума минимума функционала (23). При этом экстремаль $z(x, y)$ должна удовлетворять граничному условию (24).

В данном случае функция Лагранжа $F = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ зависит лишь от частных производных функции $z(x, y)$ первого порядка.

Для решения этой задачи нужно обратиться к уравнению Эйлера-Остроградского

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z'_y} = 0. \tag{25}$$

Подстановка функции Лагранжа в уравнение (25) приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\right) = 0.$$

Полученное урвнение и ведет к уравнению минимальной поверхности.