Вариационное исчисление. Семинар 13 мая.

13 мая 2020 г.

1 Задача 213, Краснов

Материальная точка описывает окружность $\rho = 2R\cos\varphi$ ($\rho,\ \varphi$ - полярные координаты) радиуса R под действием центральной силы $\frac{k}{\rho^5}$, обратно пропорциональной пятой степени расстояния от центра, находящегося в начале координат. Показать, что на любой дуге этой окружности

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$$

интеграл действия достигает сильного минимума.

Решение:

Построим функционал действия

$$J[\rho] = \int_{t_0}^{t_1} (T - V)dt \tag{1}$$

и покажем, что окружность действительно является экстремалью полученного функционала при некотором наборе параметров задачи. Далее мы покажем, что на указанной дуге этой окружности интеграл действия достигает сильного минимума.

1.1 Построение функционала

Энергия системы сохраняется (первый интеграл уравнения Эйлера) поскольку потенциал V не зависит от переменной интегрирования t.

Таким образом, перепишем функционал (1) как

$$J[\rho] = \int_{t_0}^{t_1} (T - (E - T))dt = \int_{t_0}^{t_1} (2T - E)dt. \tag{2}$$

Принебрегая константой во втором слагаемом функции Лагранжа, будем исследовать на наличие экстремума ассоциированный функционал

$$J_1[\rho] = \int_{t_0}^{t_1} 2Tdt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2T}\sqrt{2T}dt = \int \sqrt{2T}ds. \tag{3}$$

Мы воспользовались здесь тем, что $\sqrt{2T}dt = vdt = ds$, где $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ – дифференциал перемещения.

Вводя на плоскости полярные координаты

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi,$$

нетрудно видеть, что

$$dx = \cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi, \qquad dy = \sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi.$$

Таким образом,

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi.$$

Примем также во внимание, что центральная притягивающая сила, действующая на точку, связана с потенциалом следующим соотношением

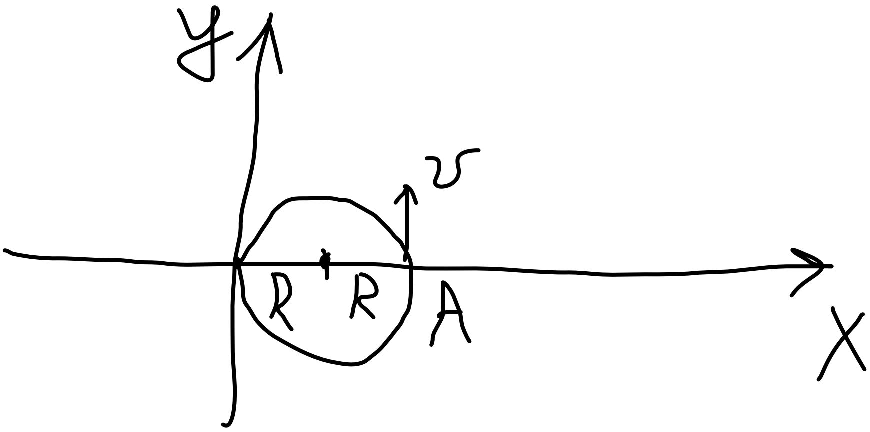
$$F_\rho = -\frac{k}{\rho^5} = -\frac{dV}{d\rho}, \qquad V(\rho) = -\frac{k}{4\rho^4}. \tag{4}$$

Возвращаясь к дифференциалу (3), получаем

$$J_1[\rho] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{2(E - V)}\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{2E + \frac{k}{2\rho^4}}\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi. \tag{5}$$

Найдем полную энергию E, которая отвечает траектории движения - окружности, проходящей через начало координат.

В максимально удаленной от начала координат точке траектории (точка A) центростремительное ускорение сообщается материальной точке центральной силой.



Таким образом, уравнение второго закона Ньютона в проекции на ось X принимает вид

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{k}{(2R)^5}.$$

Следовательно, кинетическая энергия в этой точке равна

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{k}{64R^4}.$$

Отсюда следует, что согласно (4)

$$E = T + V = \frac{k}{64R^4} - \frac{k}{4(2R)^4} = 0.$$

Таким образом, движение по окружности соответствует нулевой полной энергии, и функционал (5) без учета константы $\sqrt{k/2}$ принимает вид

$$J_2[\rho] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{\rho^2} d\varphi. \tag{6}$$

1.2 Исследование функционала на экстремум

Будем исследовать функционал методом Гамильтона-Якоби. Введем переменную $p = F'_{\rho'} = \frac{\rho'}{\rho^2\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}$. Отсюда получаем, что

$$\rho' = \pm\frac{p\rho}{\sqrt{A^2 - p^2}}, \qquad A = \frac{1}{\rho^2}.$$

Введем функцию Гамильтона

$$-H = A\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} - A\frac{\rho'^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} = \pm\rho\sqrt{A^2 - p^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right)^2}.$$

Поделим переменные в уравнении Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} == \pm\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right)^2} = C. \tag{7}$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} = C, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial\rho} = \pm\frac{1}{\rho^2}\sqrt{1 - C^2\rho^2}.$$

Запишем полный интеграл для функции Θ:

$$\Theta = \int \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} d\varphi + \int \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} d\rho = C \int d\varphi \pm \int \frac{1}{\rho^2}\sqrt{1 - C^2\rho^2}d\rho.$$

Применим теорему Якоби

$$\frac{\partial \Theta}{\partial C} = \gamma = \varphi \mp C \int \frac{d\rho}{\sqrt{1 - C^2\rho^2}}. \tag{8}$$

Делая в интеграле замену $\rho = \frac{1}{C}\cos t$,получаем окончательно

$$\rho = \frac{1}{C}\cos(\varphi - \gamma).$$

При значениях параметров

$$C = \frac{1}{2R}, \qquad \gamma = 0$$

полученная траектория согласуется с исходным предположением.

1.3 Исследование вида экстремума

Мы рассматриваем функционал с функцией Лагранжа

$$F = \frac{\sqrt{\rho^2 + {\rho'}^2}}{\rho^2}.$$

Будем исследовать функционал (при $E = 0$) с помощью признака Лежандра. Получаем, что

$$F''_{\rho'\rho'} = (\rho^2 + {\rho'}^2)^{-3/2} > 0.$$

Всюду на дугах

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$$

выражение $\rho'(\varphi)$ является ограниченным снизу ($\sin\varphi \neq 0$). Таким образом, согласно признаку Лежандра, на любой дуге данного вида функционал имеет сильный минимум.

2 Задача 214, Краснов

Изучить движение материальной точки под действием притягивающей центральной силы, пропорциональной расстоянию от центра O, исходя из принципа наименьшего действия и применяя метод Гамильтона-Якоби.

Решение:
Проекция силы, действующей на материальную точку, на радиальную ось имеет вид

$$F_r = -kr = -\frac{dV}{dr}, \qquad V = \frac{kr^2}{2}.$$

Потенциальная энергия не зависит от времени, поэтому энергия системы сохраняется.

Исходя из принципа наименьшего действия, как и предыдущей задаче, приходим к функционалу

$$J[r] = \int_{t_0}^{t_1} dt\sqrt{2T}\sqrt{2T} = \int ds\sqrt{2(E - kr^2/2)} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{2E - kx^2 - ky^2}\sqrt{1 + {y'}^2}dx. \tag{9}$$

Мы перешли здесь к декартовым координатам и воспользовались соотношнием

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Исследование функционала (9) на экстремали проведем методом Гамильтона-Якоби. Введем переменную

$$p = F_{y'} = \frac{Ay'}{\sqrt{1 + {y'}^2}}. \tag{10}$$

Мы ввели здесь обозначение

$$A \equiv \sqrt{2E - kx^2 - ky^2}.$$

Разрешая уравнение (10) относительно y', получим:

$$y'^2 = \frac{p^2}{A^2 - p^2}.$$

Определим функцию Гамильтона

$$-H = F - y'F_{y'} = A\sqrt{1+y'^2} - \frac{Ay'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{A}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби в данном случае принимает вид

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = -H = \pm\sqrt{A^2 - p^2} = \pm\sqrt{2E - kx^2 - ky^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2}.$$

Разделение переменных в уравнении приводит к следующему результату

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + kx^2 = 2E - ky^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 = C.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \pm\sqrt{C - kx^2} \tag{11}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \pm\sqrt{2E - C - ky^2}. \tag{12}$$

Построим полный интеграл выражения Θ:

$$\Theta = \pm\int\sqrt{C - kx^2}dx \pm \int\sqrt{2E - C - ky^2}dy$$

и применим теорему Якоби

$$\frac{\partial\Theta}{\partial C} = \gamma = \pm\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{C - kx^2}} + \frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{2E - C - ky^2}}. \tag{13}$$

Интегрирование приводит к уравнению семейства траекторий материальной точки

$$2\sqrt{k}\gamma = \pm\arccos\left(x\sqrt{\frac{k}{C}}\right) - \arccos\left(y\sqrt{\frac{k}{2E - C}}\right). \tag{14}$$

Покажем, что полученное семейство является семейством эллипсов, которое параметризовано постоянными C и γ.

Введем обозначения

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{k}{2E - C}}, \qquad \beta \equiv \sqrt{\frac{k}{C}}, \qquad \sigma \equiv 2\gamma\sqrt{k}.$$

В этих обозначениях уравнение (14) перепишем в виде

$$\alpha y = \cos\left(\arccos(\beta x) \mp \sigma\right) = \beta x\cos\sigma \mp \sin(\arccos(\beta x))\sin\sigma.$$

После возведения в квадрат получаем:

$$(\alpha y - \beta x\cos\sigma)^2 = \sin^2(\arccos(\beta x))\sin^2\sigma.$$

Окончательно приходим к уравнению

$$\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 - 2\alpha\beta\cos\sigma xy = \sin^2\sigma. \tag{15}$$

Поворот системы координат в плоскости XY приводит уравнение (15) к каноническоми виду.