Вариационное исчисление. Семинар 18 апреля.

18 апреля 2020 г.

1 Геодезические линии на сфере.

Задача заключается в построении геодезической линий на сфере радиуса R при условии, что кривая проходит через две фиксированные точки $A(R, \theta_0, \varphi_0)$ и $B(R, \theta_1, \varphi_1)$.

Решение.

Воспользуемся выражением для дифференциала дуги в сферических координатах, полученным нами в задаче 115 (методичка):

$$ds = \sqrt{\rho'^2_\varphi + \rho^2 \theta'^2_\varphi + \rho^2 \sin^2\theta} d\varphi.$$

Учитывая, что $\rho = const = R$, получаем, что

$$ds = R\sqrt{\theta'^2_\varphi + \sin^2\theta} d\varphi.$$

Таким образом, задача сводится к построению экстремалей функционала

$$J[\theta] = R\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \sqrt{\theta'^2_\varphi + \sin^2\theta} d\varphi \tag{1}$$

при условии выполнения граничных условий

$$\theta(\varphi_0) = \theta_0, \qquad \theta(\varphi_1) = \theta_1. \tag{2}$$

Поскольку функция Лагранжа $F = \sqrt{\theta'^2_\varphi + \sin^2\theta}$ не зависит от переменной интегрирования φ, воспользуемся первым интегралом уравнения Эйлера $F - \theta'_\varphi F_{\theta'_\varphi} = C$

$$\sqrt{\theta'^2_\varphi + \sin^2\theta} - \theta'_\varphi \frac{\theta'_\varphi}{\sqrt{\theta'^2_\varphi + \sin^2\theta}} = C \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{\theta'^2_\varphi + \sin^2\theta}} = C.$$

Выражая из этого уравнения θ'_φ, получаем

$$\theta'_\varphi = \frac{1}{C}\sqrt{\sin^4\theta - C^2\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{C}\sqrt{1 - \frac{C^2}{\sin^2\theta}}.$$

Отсюда получаем, что

$$d\varphi = \frac{C d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{1 - \frac{C^2}{\sin^2\theta}}}. \tag{3}$$

Осталось проинтегрировать уравнение (3), сделав замену переменной $\zeta = C\cot\theta, \quad d\zeta = -\frac{C}{\sin^2\theta}d\theta$:

$$\varphi + C_2 = -\int \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - C^2(1+\cot^2\theta)}} = -\int \frac{d\zeta}{\sqrt{C_3^2 - \zeta^2}}. \tag{4}$$

Мы ввели здесь обозначение $C_3^2 = 1 - C^2$.

Следующая замена переменной $\zeta = C_3\cos t$ приводит уравнение (3) к окончательному виду

$$\varphi + C_2 = t = \arccos\left(\frac{\zeta}{C_3}\right) = \arccos\left(\frac{C}{C_3}\cot\theta\right).$$

Таким образом, геодезические на сфере имеют вид

$$\varphi + C_2 = \arccos(C_4\cot\theta).$$

Постоянные $C_2,\ C_4$ фиксируются с помощью граничных условий

$$\varphi_0 + C_2 = \arccos(C_4\cot\theta_0),$$
$$\varphi_1 + C_2 = \arccos(C_4\cot\theta_1).$$

2 Условия трансверсальности.

2.1 Общие сведения.

1) Если кривая $y = y(x)$ дает экстремум функционалу

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

среди класса допустимых кривых, конец которых находится на кривой

$$\varphi(x, y) = 0,$$

то в точке B пересечения кривой $y = y(x)$ с кривой $\varphi(x, y) = 0$ должно быть выполнено условие трансферсальности

$$\frac{F - y'F_{y'}}{\varphi'_x}|_B = \frac{F_{y'}}{\varphi'_y}|_B.$$

2) Если конец искомой кривой находится на прямой $x = x_1$, то в точке x_1 должно быть выполнено условие

$$F_{y'}|_{x=x_1} = 0 \tag{5}$$

3) Если конец искомой кривой находится на прямой $y = y_1$, то в точке x_1 должно быть выполнено условие

$$F - y'F_{y'}|_{y=y'} = 0. \tag{6}$$

Условия (5)-(6) называются естественными граничными условиями.

4) Задача с подвижными концами для функционалов вида

$$J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx.$$

При исследовании на экстремум таких функционалов считаем, что хотя бы одна из граничных точек $A(x_0, y_0, z_0)$ или $B(x_1, y_1, z_1)$ перемещается по заданной кривой. Экстремум может достигаться лишь на интегральных кривых системы уравнений Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,$$
$$F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0.$$

Пусть точка $A(x_0, y_0, z_0)$ закреплена, а другая граничная точка $B(x_1, y_1, z_1)$ может перемещаться по некоторой кривой, заданной уравнениями

$$y = \varphi(x),$$
$$z = \psi(x).$$

Условие трансверсальности в этом случае принимает вид

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]\,|_B = 0.$$

Аналогично выписывается условие и для левого конца, если он тоже перемещается вдоль некоторой кривой.

5) Если граничная точка $A(x_0, y_0, z_0)$ неподвижна, а другая граничная точка $B(x_1, y_1, z_1)$ может перемещаться по некоторой поверхности

$$z = \varphi(x, y),$$

то условия трансверсальности будут

$$[F - y'Fy' + (\varphi'_x - z')F_{z'}]|_{x=x_1} = 0 \tag{7}$$

$$[F_{y'} + F_{z'}\varphi'_y]|_{x=x_1} = 0. \tag{8}$$

Если подвижной точкой является граничная точка $A(x_0, y_0, z_0)$, то при $x = x_0$ получаем условия, совершенно аналогичные условиям (7)-(8).

2.2 Задача 172, Краснов

Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,0)$ до эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Решение.

Пусть кратчайшее расстояние определяется уравнением $y = y(x)$. Составим функционал

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Граничное условие на закрепленном конце имеет вид

$$y(x_0) = y_0 \qquad \Rightarrow \qquad y(1) = 0. \tag{9}$$

Незакрепленный конец экстремали лежит на кривой

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0. \tag{10}$$

Поскольку функция Лагранжа не зависит от функции y, воспользуемся первым интералом уравнения Эйлера

$$F_{y'} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1 + y'^2} = C.$$

Отсюда следует, что

$$y' = C_1 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = C_1 x + C_2.$$

В данной задаче возникает четыре неизвестных: C_1, C_2, x_1, y_1. Чтобы зафиксировать эти 4 постоянных, запишем четыре условия.

1) Точка $A(1,0)$ принадлежит экстремали:

$$C_1 + C_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = -C_1. \tag{11}$$

2) Точка $B(x_1, y_1)$ принадлежит эксвемали:

$$C_1 x_1 - C_1 = y_1. \tag{12}$$

3) Точка $B(x_1, y_1)$ принадлежит эллипсу:

$$4x_1^2 + 9y_1^2 = 36. \tag{13}$$

4) Условие трансверсальности:

$$\frac{F - y'F_{y'}}{\varphi_x}|_{x=x_1} = \frac{F_{y'}}{\varphi_y}|_{x=x_1}.$$

В данном случае это условие принимает вид

$$\left[\sqrt{1 + y'^2} - y'\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right]|_{x=x_1} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\frac{8x}{18y}|_{x=x_1} \qquad \Rightarrow \qquad 1 = C_1 \frac{4}{9}\frac{x_1}{y_1}. \tag{14}$$

Решение системы уравнений (11)-(14) ведет к результату

$$x_1 = \frac{9}{5}, \qquad y_1 = \pm\frac{8}{5}, \qquad C_1 = -C_2 = \pm 2.$$

Уравнение экстремалей имеет вид $y(x) = \pm 2(x - 1)$. Эти данные решеют задачу. Наличие пары экстремалей связано с симметрией задачи. Неподвижная точка $A(1,0)$ находится на оси OX, являющейся осью симметрии эллипса.

2.3 Задача.

Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,1,1)$ до сферы $x^2+y^2+z^2=1$.

Решение.

Свободная точка $B(x_0,y_0,z_0)$ экстремали лежит на сфере. Решение сводится к исследованию на экстремум функционала

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}dx.$$

Система уравнений Эйлера в данном случае принимает вид

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=\tilde{C}_1,$$

$$\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=\tilde{C}_2.$$

Это алгебраическая система двух уравнений относительно переменных y' и z'. Ее решение имеет вид

$$y'=C_1 \qquad \Rightarrow \qquad y=C_1x+C_2, \tag{15}$$

$$z'=C_3 \qquad \Rightarrow \qquad z=C_3x+C_4. \tag{16}$$

Количество неизвестных в данной задаче - семь: четыре константы параметризуют экстремаль, еще три неизвестных - координаты точки на сфере, ближайшей к точке $A(1,1,1)$.

Нужно составить систему семи уравнений и решить их.

1) Условие принадлежности точки $A(1,1,1)$ экстремали порождает два уравнения.

$$1=C_1+C_2, \tag{17}$$

$$1=C_3+C_4. \tag{18}$$

2) Точка $B(x_0,y_0,z_0)$ также принадлежит экстремали. Это порождает еще два уравнения:

$$y_0=C_1x_0+C_2, \tag{19}$$

$$z_0=C_3x_0+C_4. \tag{20}$$

3) Точка $B(x_0,y_0,z_0)$ принадлежит сфере. Получаем еще одно (пятое) уравнение:

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=1. \tag{21}$$

4) Последние два уравнения порождаются условиями трансверсальности типа (7)-(8) в точке $B(x_0,y_0,z_0)$:

$$[F-y'Fy'+(\varphi'_x-z')F_{z'}]|_{x=x_0}=0 \tag{22}$$

$$[F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y]|_{x=x_0}=0. \tag{23}$$

Здесь уравнение поверхности $z=\varphi(x,y)$ принимает вид

$$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Исходя из геометрии задачи, мы выбираем знак плюс, поскольку точка $A(1,1,1)$ лежит в верхнем полупространстве. Таким образом,

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Применительно к нашей задаче уравнения (22)-(23) принимают вид

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2}-\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-z'\right)\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}|_{x=x_0}=0, \tag{24}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}|_{x=x_0}=0. \tag{25}$$

Еще раз отметим, что пара уравнений (24)-(25) является системой граничных условий в точке, но никак не является системой дифференциальных уравнений!

Полагая $y'|_{x=x_0} = C_1$, $z'|_{x=x_0} = C_3$, пара уравнений (24)-(25) переписывается в виде:

$$1 - \frac{x_0 C_3}{z_0} = 0, \tag{26}$$

$$C_1 - \frac{y_0 C_3}{z_0} = 0. \tag{27}$$

Система уравнений (17)-(21), (26)-(27) приводит к решению:

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = 0, \quad x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Расстояние от точки до сферы вычисляется, например, как

$$J_{min} = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} dx \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} - 1.$$

■

Домашнее задание: задачник Краснова, 173, 177, 181
методичка, 121, 122, 123, 127