Преобразование Фурье. Занятие 21 марта.

23 марта 2020 г.

1 Введение

Мы будем рассматривать функции, абсолютно интегрируемые на оси. Определим преобразование Фурье функции f следующим образом:

$$F[f](x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt. \tag{1}$$

Определим также обратное Фурье-преобразование:

$$F^{-1}[f](x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt} dt. \tag{2}$$

Справедливы следующие свойства Фурье-преобразования:

$$FF^{-1} = FF^{-1} = I, \tag{3}$$

$$F^{-1}[f](x) = \overline{F[\bar{f}](x)}, \tag{4}$$

$$F^{-1}[f](x) = F[f](-x). \tag{5}$$

Докажем свойство (4). Рассмотрим правую часть этого равенства. Согласно определению (1) мы имеем:

$$F[\bar{f}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(t) e^{-ixt} dt$$

Комплексное сопряжение левой и правой части этого выражение ведет к следующему:

$$\overline{F[\bar{f}](x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt} dt. \tag{6}$$

В свою очередь, выражение в правой части (6) совпадает с определением (2), что и доказывает выполнение свойства (4) ■.

Свойство (5) выполняется согласно определению (2) ■.

1.1 Еще несколько свойств.

Рассмотрим функцию f, на которую наложены более жесткие условия. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, пусть также f, f' абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим преобразование Фурье производной функции f. Согласно определению (1):

$$F[f'](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(t) e^{-i\lambda t} dt. \tag{7}$$

Проинтегрируем правую часть равенства (7) по частям.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(t) e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-i\lambda t}|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt =$$

$$= i\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt = i\lambda F[f](\lambda).$$

Мы воспользовались здесь тем, что функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то есть $f(-\infty) = f(\infty) = 0$.

Таким образом, мы приходим к **важному свойству:**

$$F[f'](\lambda) = i\lambda F[f](\lambda). \tag{8}$$

Повторяя описанную выше процедуру несколько раз, **получим свойство**:

$$F[f^{(k)}](\lambda) = (i\lambda)^k F[f](\lambda). \tag{9}$$

Рассмотрим еще одно свойство Фурье-преобразовния. Пусть функция f такова, что функция $g(x) = xf(x)$ абсолютно интегрируема на оси, как и сама функция f. Пусть нам известно Фурье-преобразование функции f, то есть функция $F[f]$. Найдем Фурье-преобразование функции $xf(x)$. А именно, согласно определению (1)

$$F[g](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-i\lambda x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx = iF'[f](\lambda). \tag{10}$$

Дифференцирование по параметру λ под знаком интеграла становится возможным вследствие абсолютной интегрируемости функции f на $\mathbb{R}$. Это свойство приводит к равномерной сходимости интеграла $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx$ по параметру λ и, тем самым, к возможности менять местами интегрирование и дифференцирование.

Обобщая свойство (10) для функций $g_k(x) \equiv x^k f(x)$ при условии, что все функции $g_j(x) = x^j f(x), \quad j = 1, 2, ..., k$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, плучим:

$$F[g_k](\lambda) = i^k \frac{d^k}{d\lambda^k} F[f](\lambda). \tag{11}$$

Приведем теперь еще два свойства, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1.2 Теорема смещения и теорема запаздывания.

Теорема смещения:

Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда Фурье-преобразование функции $f_a(x) \equiv f(x-a)$ имеет вид

$$F[f_a](\lambda) = e^{-ia} F[f](\lambda). \tag{12}$$

Доказательство теоремы смещения:

Рассмотрим Фурье-преобразование функции $f_a(x) \equiv f(x-a)$:

$$F[f_a](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x-a)e^{-i\lambda x}dx.$$

После замены переменной $y = x - a$ получаем

$$F[f_a](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-i\lambda(y+a)}dy = e^{-ia}F[f](\lambda). \quad \blacksquare \tag{13}$$

Теорема запаздывания:

Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда Фурье-преобразование функции $f^a(x) \equiv e^{iax}f(x)$ имеет вид

$$F[f^a](\lambda) = F[f](\lambda - a). \tag{14}$$

Доказательство теоремы запаздывания:

Рассмотрим Фурье-преобразование функции $f^a(x) \equiv e^{iax}f(x)$:

$$F[f^a](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iax}f(x)e^{-i\lambda x}dx = F[f](\lambda - a). \blacksquare \tag{15}$$

Рассмотрим примеры интегралов Фурье, что приведет нас к построению таблицы простейших преобразований.

2 Примеры интегралов Фурье.

Пример 1. Рассмотрим Фурье-преобразование функции $g(x) = e^{-\alpha|x|}$.

Согласно определению (1) получим

$$F[g](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|x|} e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x} e^{-i\lambda x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x} e^{-i\lambda x} dx = \tag{16}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\alpha - i\lambda} + \frac{1}{\alpha + i\lambda} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}.$$

Пример 2. Рассмотрим Фурье-преобразование функции $g(x) = x^k e^{-\alpha|x|}$. Согласно свойству (11) и результату (16), полученному выше в *Примере 1*, имеем

$$F[g](\lambda) = i^k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2} \right). \tag{17}$$

Пример 3. Рассмотрим Фурье-преобразование функции

$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Согласно определению (1)

$$F[g](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-i\lambda x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda}. \tag{18}$$

Рассмотрим еще один важный пример.

2.1 Преобразование Фурье гауссовой функции

Рассмотрим функцию $f(x) = e^{-\alpha x^2}$. Введем обозначение $\hat{f}(\lambda)$ для Фурье-преобразования функции f. При этом

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-i\lambda x} dx. \tag{19}$$

Поскольку интеграл в правой части уравнения (19) равномерно сходится по λ,

$$\hat{f}'(\lambda) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\alpha x^2} e^{-i\lambda x} dx. \tag{20}$$

Интегрируя равенство (20) по частям, получаем

$$\hat{f}'(\lambda) = \frac{1}{-2\alpha} \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\alpha x^2} \right)' e^{-i\lambda x} dx = -\frac{\lambda}{2\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-i\lambda x} dx = -\frac{\lambda}{2\alpha} \hat{f}(\lambda). \tag{21}$$

Уравнение (21) представляет из себя однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\hat{f}'(\lambda) + \frac{\lambda}{2\alpha} \hat{f}(\lambda) = 0.$$

Решение этого уравнения получается после интегрирования уравнения

$$\frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = -\frac{1}{2\alpha} \lambda d\lambda$$

и имеет вид

$$\hat{f}(\lambda) = C_0 e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}}. \tag{22}$$

Остается найти постоянную C_0. Из уравнения (22) следует, что

$$C_0 = \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx$$

согласно уравнению (19). В последнем интеграле сделаем замену переменной $y = \sqrt{\alpha}x$:

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Мы воспользовались здесь известным равенством для интеграла Гаусса:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Таким образом, мы пришли к окончаетльному результату

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}}. \tag{23}$$

Домашнее задание.
1) Вычислить Фурье-преобразование функции $f(x) = \cos(\beta x) e^{-\alpha x^2}$.

2) Вычислить Фурье-преобразование функции $f(x) = \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^2}$

3) Вычислить Фурье-преобразование функции $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}$

4) Вычислить Фурье-преобразование функции $f(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{x(x^2+4)}$

5) Вычислить Фурье-преобразование функции $f(x) = \sin(x-2) e^{-\alpha|x|}$

6) Вычислить Фурье-преобразование функции $f(x) = \sin(x-2) e^{-\alpha|x-1|}$