Вариационное исчисление. Семинар 22 апреля.

22 апреля 2020 г.

1 Задача 177, задачник Краснова

Показать, что если условие трансверсальности совпадает при всех начальных данных с условием ортогональности, то подынтегральная функция F имеет следующую структуру

$$F = f(x, y, z)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

где f есть произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

Решение:

Условие трансверсальности в данном случае имеет следующий вид:

$$\frac{F - y'F'_{y'} - z'F'_{z'}}{\frac{\partial\psi}{\partial x}}|_{(x_1,y_1)} = \frac{F'_{y'}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}}|_{(x_1,y_1)} = \frac{F'_{z'}}{\frac{\partial\psi}{\partial z}}|_{(x_1,y_1)}. \tag{1}$$

Мы полагаем здесь, что поверхность S, которой принадлежит точка (x_1, y_1), определяется уравнением $z = \varphi(x, y)$, а функция ψ определяется как $\varphi(x, y) - z$.

Отметим, что единичный касательный вектор к экстремали определяется уравнением

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} \\ \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} \\ \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} \end{pmatrix}.$$

Определим выражение для вектора нормали к поверхности S. Пусть отображение Θ двумерной области в плоскости (X, Y) на поверхность в трехмерном пространстве задается следующим образом:

$$\Theta : \ (x, y) \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix}.$$

Тогда пара касательных векторов на поверхности определяется как

$$\Theta_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi'_x \end{pmatrix}, \qquad \Theta_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi'_y \end{pmatrix}.$$

Векторное произведение этих вкторов определит вектор нормали:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \varphi'_x \\ 0 & 1 & \varphi'_y \end{vmatrix} \ = \ -\varphi'_x\vec{i} - \varphi'_y\vec{j} + 1\vec{k}.$$

Зададим канонический вид поверхности $\psi(x, y, z) = 0$, где $\psi(x, y, z) = \varphi(x, y) - z$.

Отметим, что условие ортогональности экстремали и поверхности S отвечает параллельности векторов $\hat{\tau}$ и $\vec{n}$, то есть

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\varphi'_x}|_{(x_1,y_1)} = \frac{\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{\varphi'_y}|_{(x_1,y_1)} = \frac{\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{-1}|_{(x_1,y_1)}. \tag{2}$$

По условию задачи условие ортогональности должно совпадать с условием трансверсальности всюду на поверхности S. Сравнивая условия (1) и (2), получаем набор уравнений:

$$F - y'F'_{y'} - z'F'_{z'} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\rho(x,y,z), \tag{3}$$

$$F'_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\rho(x,y,z), \tag{4}$$

$$F'_{z'} = \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\rho(x,y,z), \tag{5}$$

где $\rho(x,y,z)$ – вообще говоря, произвольная функция точки на поверхности. Подставляя уравнения (4)-(5) в уравнение (3), получим

$$F - y'\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\rho(x,y,z) - z'\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\rho(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\rho(x,y,z).$$

Следовательно,

$$F = \sqrt{1+y'^2+z'^2}\rho(x,y,z).$$

Утверждение доказано. ■

2 Задача 181, задачник Краснова

Исследовать на экстремум функционал

$$J[y,z] = \int_0^{x_1} dx(y'^2 + z'^2 + 2yz)$$

при условиях

$$y(0) = 0, \qquad z(0) = 0. \tag{6}$$

Известно также, что точка $B(x_1, y_1, z_1)$ перемещается по плоскости $x = x_1$.

Решение:

Функция Лагранжа в данной задаче имеет вид $F = y'^2 + z'^2 + 2yz$. Система уравнений Эйлера для данной задачи принимает вид

$$2z - \frac{d}{dx}2y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z - y'' = 0, \tag{7}$$

$$2y - \frac{d}{dx}2z' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y - z'' = 0. \tag{8}$$

Исключаем первое из уравнений системы:

$$z - z^{IV} = 0. \tag{9}$$

Характеристическое уравнение $1 - \lambda^4 = 0$, отвечающее уравнению (9), имеет четыре корня:

$$\lambda_{1,2} = \pm i, \qquad \lambda_{3,4} = \pm 1.$$

Таким образом, решение уравнения (9) принимает вид

$$z(x) = A\sinh x + B\cosh x + C\sin x + D\cos x. \tag{10}$$

Из уравнения (8) следует, что

$$y(x) = A\sinh x + B\cosh x - C\sin x - D\cos x. \tag{11}$$

Условие трансверсальности в точке B имеет вид

$$\frac{F - y'F'_{y'} - z'F'_{z'}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}|_B = \frac{F'_{y'}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}|_B = \frac{F'_{z'}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}|_B, \tag{12}$$

где

$$\varphi(x,y,z) = x - x_1 = 0.$$

Эти условия можно записать также в терминах дифференциалов координат при движении точки B по поверхности:

$$\Big[(F - y'F^{'}_{y'} - z'F^{'}_{z'})\delta x + F^{'}_{y'}\delta y + F^{'}_{z'}\delta z\Big]|_{B\in S} = 0.$$

Поскольку при движении по плоскости $x = x_1$ в ноль обращается дифференциал δx, в точке B должны выполняться следующие условия:

$$F^{'}_{y'}|_B = 0, \qquad F^{'}_{z'}|_B = 0. \tag{13}$$

Этот набор условий сводится к следующему виду

$$y'|_{x=x_1} = 0, \qquad z'|_{x=x_1} = 0. \tag{14}$$

Таким образом, система четырех уравнений (6),(14) позволяет зафиксировать четыре неизвестных постоянных в уравнения (10)-(11).

Подставляя условия (6) в уравнения (10)-(11), получаем, что

$$B = D = 0.$$

Из условий (14) следует, что

$$A\cosh x_1 + C\cos x_1 = 0,$$
$$A\cosh x_1 - C\cos x_1 = 0.$$

Это, в свою очередь, ведет к системе условий

$$A = 0, \qquad C\cos x_1 = 0.$$

Последнее из них может выполняться в двух случаях:

1) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$

Тогда $y(x) = -C\sin x, \quad z(x) = C\sin x, \qquad \forall C.$

2) $\cos x_1 \neq 0, \quad C = 0, \quad y(x) = 0, \quad z(x) = 0.$

Задача решена.

3 Задача 138, методичка

Найти кратчайшее расстояние между двумя кривыми $y = x^2$ и $x^2 - y^2 = 5$.

Решение:

Составим функционал длины кривой $y(x)$ между точками (x_0, y_0) и (x_1, y_1):

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1 + y'^2}.$$

Составляем первый интеграл уравнения Эйлера и ищем его решение

$$\sqrt{1 + y'^2} - y'\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y'(x) = C_1, \qquad y(x) = C_1 x + C_2. \tag{15}$$

Условие трансверсальности в точке (x_0, y_0) ($\varphi(x,y) = y - x^2 = 0$) имеет вид

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{-2x}|_{x=x_0} = \frac{\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{1}|_{x=x_0}. \tag{16}$$

Полагая $y'(x_0) = C_1$, получаем первое уравнение

$$1 = -2x_0 C_1. \tag{17}$$

Еще два уравнения возникают из условия, что точка A принадлежит экстремали и одновременно - кривой $y = x^2$:

$$y_0 = C_1 x_0 + C_2, \tag{18}$$

$$y_0 = x_0^2. \tag{19}$$

Условие трансверсальности в точке (x_1, y_1) $(\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - 5 = 0)$ имеет вид:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}}{2x}|_{x=x_1} = \frac{\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{-2y}|_{x=x_1}. \tag{20}$$

Это условие переписывается как

$$-2C_1 = 2x_1 C_1, \tag{21}$$

Еще два уравнения возникают аналогично рассмотренному выше в точке (x_0, y_0):

$$y_1 = C_1 x_1 + C_2, \tag{22}$$

$$y_1^2 = x_1^2 - 5. \tag{23}$$

Шесть уравнений (17)-(19) и (21)-(23) фиксируют шесть неизвестных $C_1,\ C_2,\ x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1$.

Окончательный ответ следующий

$$x_0 = \mp\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_1 = \mp\sqrt{6},$$

$$y_0 = \frac{3}{2}, \qquad y_1 = 1,$$

$$C_2 = 2, \qquad C_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Задача имеет симметрию, связанную со взаимным расположением параболы и гиперболы. Расстояние между ними $\frac{\sqrt{7}}{2}$.