Семинар 23 мая.

23 мая 2020 г.

Задача

Найти минимум функционала

$$J[y] = \int_0^1 (\frac{1}{2}{y'}^2 + yy' + y' + y)dx.$$

Решение: функция Лагранжа имеет вид

$$F = \frac{1}{2}{y'}^2 + yy' + y' + y.$$

Поскольку $F''_{y'y'} \neq 0$, можно воспользоваться методом Гамильтона-Якоби. Введем функцию p:

$$p = F'_{y'} = y' + y + 1.$$

Находим отсюда, что

$$y' = p - y - 1.$$

Определим функцию Гамильтона

$$-H = F - y'F'_{y'} = \frac{1}{2}(p - y - 1)^2 + (y + 1)(p - y - 1) + y - (p - y - 1)p = -\frac{1}{2}(p - y - 1)^2 + y.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - y - 1\right)^2 + y.$$

Применяем метод деления переменных в уравнении Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - y - 1\right)^2 + y = -C.$$

Тогда

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -C, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \pm\sqrt{2(C + y)} + y + 1.$$

Интеграл от полного дифференциала приводит нас к выражению

$$\Theta = -\int C dx + \int \left(\pm\sqrt{2(C + y)} + y + 1\right) dy.$$

В свою очередь, теорема Якоби приводит к уравнению

$$\frac{\partial \Theta}{\partial C} = -\int dx \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2(C + y)}} = \gamma.$$

Берем интеграл и приходим к выражению

$$-x \pm \sqrt{2(C + y)} = \gamma.$$

Выражая y из этого уравнения, приходим к уравнению экстремали:

$$y = \frac{1}{2}(x+\gamma)^2 - C. \tag{1}$$

Отметим, что начальная и конечная точки экстремали находятся на прямых $x = 0$ и $x = 1$. Это утверждение приводит нас к условиям трансверсальности:

$$F'_{y'}\Big|_{x=0} = F'_{y'}\Big|_{x=1} = 0. \tag{2}$$

Согласно уравнению (1)

$$F'_{y'} = y' + y + 1 = \gamma + x + \frac{1}{2}(\gamma + x)^2 - C + 1.$$

Условия (2) приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} \gamma + \frac{1}{2}\gamma^2 + 1 - C = 0, \\ \gamma + 1 + \frac{1}{2}(\gamma+1)^2 + 1 - C = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Решение системы (3) имеет вид

$$C = \frac{5}{8}, \qquad \gamma = -\frac{3}{2}.$$

Таким образом, мы получили уравнение экстремали. Из уравнения (1) следует, что

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 1). \tag{4}$$

Значение функционала на экстремали получается после подстановки явного вида экстремали (4) в исходный функционал и равно

$$J[y] = \int_0^1 dx(\frac{1}{2}{y'}^2 + yy' + y' + y) = -\frac{13}{24}.$$

Остается проверить вид экстремума функционала. Для этого следует применить признак Лежандра. Поскольку

$$F''_{y'y'} = 1 > 0$$

при любом значении третьего аргумента всюду в окрестности экстремали, мы получили экстремум минимум.