Приложения Фурье-преобразования. Семинар 25 марта.

27 марта 2020 г.

Мы рассмотрим теперь несколько задач, решение которых основано на методах Фурье-преобразования.

1 Интегральные уравнения на оси.

Найти решение уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} g(x)dx = \frac{\sin\lambda}{\lambda} \tag{1}$$

в классе квадратично интегрируемых функций.

Решение.

Отметим, что левая часть уравнения (1) представляет собой Фурье-преобразование функции g. Таким образом, уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\sqrt{2\pi}F[g](\lambda) = \frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

Таким образом,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F^{-1}\left[\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\chi_{(-1,1)}(x) = \frac{1}{2}\chi_{(-1,1)}(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & |x| < 1, \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

Мы ссылаемся здесь на пример, разобранный в предыдущей лекции.

2 Решение дифференциальных уравнений.

Найти убывающее на бесконечности решение уравнения

$$y'' - y = e^{-\alpha|x|} \tag{2}$$

Решение.

Применим Фурье-преобразование к левой и правой части уравнения (2)

$$((i\lambda)^2 - 1)\hat{y}(\lambda) = F\left[e^{-\alpha|x|}\right].$$

Таким образом, выражение для $\hat{y}(\lambda)$ принимает вид

$$\hat{y}(\lambda) = -\frac{F\left[e^{-\alpha|x|}\right](\lambda)}{\lambda^2+1}.$$

Наконец,

$$y(x) = -F^{-1}\left[\frac{1}{\lambda^2+1}F\left[e^{-\alpha|x|}\right](\lambda)\right](x). \tag{3}$$

Отметим, что выражение в квадратных скобках может быть записано в следующем виде:

$$\frac{1}{\lambda^2+1}F\left[e^{-\alpha|x|}\right](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}F[e^{-|x|}](\lambda)F\left[e^{-\alpha|x|}\right](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}F[f*g](\lambda).$$

Мы ввели обозначения

$$f(x) \equiv e^{-|x|}, \quad g(x) \equiv e^{-\alpha|x|}. \tag{4}$$

Мы воспользовались также доказанным ранее свойством свертки квадратично интегрируемых функций:

$$F[f*g] = F[f]F[g].$$

Возвращаясь к уравнению (3), получаем

$$y(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}(f*g)(x), \tag{5}$$

где функции f и g определены в уравнении (4). Окончательно, мы приходим к следующему результату:

$$y(x) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt e^{-|t|}e^{-\alpha|x-t|}. \tag{6}$$

Самостоятельно показать, что
1) при $\alpha \neq 1$

$$y(x) = \frac{1}{\alpha^2-1}\left(e^{-\alpha|x|} - \alpha e^{-|x|}\right).$$

2) при $\alpha = 1$

$$y(x) = -\frac{1}{2}(|x|+1)e^{-|x|}.$$

3 Решение уравнений в свертках.

Найти убывающее на бесконечности решение уравнения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-\alpha|x-t|}dt = \frac{x}{x^2+\beta^2}. \tag{7}$$

Решение.
Введем обозначения

$$f(x) \equiv e^{-\alpha|x|}, \qquad g(x) \equiv \frac{x}{x^2+\beta^2}.$$

Тогда в этих обозначениях уравнение (7) принимает вид

$$\sqrt{2\pi}(y*f)(x) = g(x). \tag{8}$$

Применяя к левой и правой частям уравнения (8) Фурье-преобразование, получаем

$$\sqrt{2\pi}\hat{y}(\lambda)\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda). \tag{9}$$

Получилось алгебраическое уравнение относительно функции $\hat{y}$

$$\hat{y}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\hat{g}(\lambda)}{\hat{f}(\lambda)}. \tag{10}$$

3.1 Вычисление функции $\hat{g}(\lambda)$

$$\hat{g}(\lambda) = F\left[\frac{x}{\beta^2+x^2}\right](\lambda) = iF'\left[\frac{1}{\beta^2+x^2}\right](\lambda) = \frac{i}{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{d\lambda}\left\{F^{-1}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^2+x^2}\right](-\lambda)\right\} =$$

$$= \frac{i}{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{d\lambda}e^{-\beta|\lambda|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\begin{array}{ll} -ie^{-\beta\lambda}, & \lambda > 0 \\ ie^{\beta\lambda}, & \lambda < 0. \end{array}\right.$$

3.2 Вычисление функции $\hat{f}(\lambda)$

$$\hat{f}(\lambda) = F[f](\lambda) = F\left[e^{-\alpha|x|}\right](\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}.$$

Возвращаясь к уравнению (10), получаем окончательно

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F^{-1}\left[\frac{\pi}{2\alpha}(\alpha^2+\lambda^2)\frac{i}{\beta}\frac{d}{d\lambda}e^{-\beta|\lambda|}\right](x). \tag{11}$$

Полученное выражение может быть посчитано явно.

4 Решение разностных уравнений.

Найти обращающееся в ноль на бесконечности решение уравнения

$$f(x+h) - 2f(x) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{12}$$

Решение:

Применим Фурье-преобразование к левой и правой частям уравнения (12). Пользуясь в частности теоремой смещения, получим

$$\left(e^{i\lambda h} - 2\right)\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\lambda|}.$$

Таким образом,

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\lambda|}}{(e^{i\lambda h} - 2)} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{i\lambda h}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{i\lambda n h}. \tag{13}$$

Наконец, применяя обратное преобразование Фурье к уравнению (13), получаем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\lambda e^{i\lambda x} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{i\lambda n h} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\lambda e^{i\lambda x} e^{-|\lambda|} e^{i\lambda n h} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} F^{-1}[e^{-|\lambda|}](x+nh) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} F[e^{-|\lambda|}](-x-nh) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{(1+(x+nh)^2)}.$$

Ответ получен в виде функционального ряда.

5 Равенство Парсеваля.

Посчитать интеграл

$$J = \int_0^{\infty} \frac{sin(\alpha x) sin(\beta x)}{x^2} dx, \quad \alpha > \beta > 0.$$

Решение:

$$J = \int_0^{\infty} \frac{sin(\alpha x) sin(\beta x)}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(\alpha x) sin(\beta x)}{x^2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \langle F[f], F[g] \rangle,$$

где функции f и g определены следующим образом

$$f(x) = \chi_{(-\alpha,\alpha)}(x), \qquad g(x) = \chi_{(-\beta,\beta)}(x).$$

Воспользуемся равенством Парсеваля

$$J = \frac{\pi}{4} \langle F[f], F[g] \rangle = \frac{\pi}{4} \langle f, g \rangle = \frac{\pi}{4} \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\alpha,\alpha)}(x) \chi_{(-\beta,\beta)}(x) dx = \frac{\pi}{4} 2\beta = \frac{\pi\beta}{2}.$$