# Вариационное исчисление. Семинар 29 апреля.

29 апреля 2020 г.

## 1 Задача 1.

Найти кратчайшее расстояние между поверхностью $x^2+y^2+z^2=1$ и пространственной кривой $x=5, \quad z=y^2+5$.

### 1.1 Решение (способ 1):

Параметризация пространственной кривой выглядит следующим образом:

$$x=\varphi(y)=5, \qquad z=\psi(y)=y^2+5. \tag{1}$$

Рассмотрим функционал следующего вида

$$J[x,z]=\int_{y_0}^{y_1} dy F(y,x,z,x',z')=\int_{y_0}^{y_1} dy\sqrt{1+x'^2+z'^2}. \tag{2}$$

Система уравнений Эйлера усроена следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial z'}=0.$$

Эта система уравнений приводит к решению

$$x=C_1y+C_2, \qquad z=C_3y+C_4. \tag{3}$$

Определим теперь количество неизвестных в задаче. Шесть неизвестных - это координаты начальной и конечной точек экстремали: $A(x_0,y_0,z_0), \quad B(x_1,y_1,z_1)$. Еще четыре неизвестных - коэффициенты, параметризующие экстремаль (3): $C_1, \ C_2, \ C_3, \ C_4$.

Таким образом, неизвестных 10, всего нужно написать 10 уравнений.

Первые два уравнения: точка $A$ принадлежит экстремали:

$$x_0=C_1y_0+C_2, \tag{4}$$

$$z_0=C_3y_0+C_4. \tag{5}$$

Точка $A$ принадлежит пространственной кривой:

$$x_0=5, \tag{6}$$

$$z_0=y_0^2+5. \tag{7}$$

Точка $B$ принадлежит экстремали

$$x_1=C_1y_1+C_2, \tag{8}$$

$$z_1=C_3y_1+C_4. \tag{9}$$

Точка $B$ принадлежит поверхности:

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=1. \tag{10}$$

Условие трансверсальности в точке $A$ (экстремаль и пространственная кривая):

$$\left[F+(\varphi_y'-x')F_{x'}'+(\psi_y'-z')F_{z'}'\right]|_{y=y_0}=0. \tag{11}$$

В явном виде это условие выглядит так:

$$\left[\sqrt{1+x'^2+z'^2}+(-x')\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+z'^2}}+(2y-z')\frac{z'}{\sqrt{1+x'^2+z'^2}}\right]|_{y=y_0}=0,$$

что переписывается в простом виде:

$$2y_0C_3=-1. \tag{12}$$

Условие трансверсальности в точке $B$ (экстремаль и поверхность). Мы полагаем здесь уравнение поверхности

$$\tilde{\varphi}(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0.$$

Тогда

$$\frac{F-x'F'_{x'}}{\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}}|_B=\frac{F'_{x'}}{\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}}|_B=\frac{F'_{z'}}{\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z}}|_B. \tag{13}$$

Пара этих уравнений имеет вид

$$\frac{\sqrt{1+x'^2+z'^2}-\frac{x'^2}{\sqrt{1+x'^2+z'^2}}}{2y}|_{y=y_1}=\frac{\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+z'^2}}}{2x}|_{y=y_1}=\frac{\frac{z'}{\sqrt{1+x'^2+z'^2}}}{2z}|_{y=y_1}. \tag{14}$$

После явных подстановок уравнение (14) принимает простой вид

$$\frac{1+C_3^2}{2y_1}=\frac{C_1}{2x_1}, \tag{15}$$

$$\frac{C_1}{2x_1}=\frac{C_3}{2z_1}. \tag{16}$$

Таким образом, мы получили систему дсяти уравнений (4)-(10), (12), (15)-(16).

## 1.2 Решение (2 способ):

Поскольку в данной задаче мы имеем дело с функционалом Ферма, то условие трансверсальности в точке $A$ совпадает с условием ортогональности касательного вектора к экстремали и касательного вектора к пространственной кривой в точке касания.

Рассмотрим функционал

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx, \quad F(x,y,z,y',z')=n(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}.$$

Пусть пространственная кривая задается условиями

$$y=\varphi(x), \qquad z=\psi(x). \tag{17}$$

Условие трансверсальности в точке сопряжения экстремали и пространственной кривой имеет вид

$$\left[F+(\varphi'-y')F'_{y'}+(\psi'-z')F'_{z'}\right]|_A, \tag{18}$$

или, несколько в другом виде:

$$\left[(F-y'F'_{y'}-z'F'_{z'})+\varphi'F'_{y'}+\psi'F'_{z'}\right]|_A=0. \tag{19}$$

Последнее уравнение в случае функционала Ферма переписывается в виде

$$(1+\varphi'y'+\psi'z')|_{x=x_0}=0. \tag{20}$$

Последнее условие представляет собой условие ортогональности касательного вектора к экстремали $\vec{\tau}_e$ и касательного вектора к пространственной кривой $\vec{\tau}_c$ в точке их сопряжения

$$<\vec{\tau}_c,\vec{\tau}_e>|_A=0, \tag{21}$$

где

$$\vec{\tau}_c=\begin{pmatrix}1\\ \varphi'\\ \psi'\end{pmatrix}, \qquad \vec{\tau}_e=\begin{pmatrix}1\\ y'\\ z'\end{pmatrix}.$$

Вернемся к нашей ситуации и рассмотрим по определению компоненты касательного вектора к пространственной кривой в виде

$$\varphi'(x)|_{x=x_0} = \lim_{\delta x\to 0} \frac{\delta\varphi}{\delta x}|_{x=x_0}, \qquad \psi'(x)|_{x=x_0} = \lim_{\delta x\to 0} \frac{\delta\psi}{\delta x}|_{x=x_0}.$$

Перепишем уравнение (20) в допредельном смысле

$$(\delta x + \delta\varphi y' + \delta\psi z')|_{x=x_0} = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad <\vec{\tau}_e, \vec{t}> |_{x=x_0} = 0, \tag{22}$$

где, согласно (17):

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}.$$

Однако, пространственная кривая лежит в плоскости $x = const$. Поэтому

$$\delta x = 0.$$

Таким образом, условие (22) легко переписать в виде

$$(y' + z'\frac{\delta z}{\delta y})|_{x=x_0} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (y' + z'\psi'_y)|_{x=x_0} = 0. \tag{23}$$

Полученное уравнение и оказывается условием трансверсальности в данной задаче.

## 2 Задача 2, (задачник Краснова, 193 )

Построить канонические уравнения Гамильтона, если функционал имеет вид

$$J[y] = \int xy\sqrt{y'}dx.$$

**Решение:**
Функция Лагранжа имеет вид: $F = xy\sqrt{y'}$. Выполняется условие

$$F''_{y'y'} \neq 0. \tag{24}$$

Введем переменную $p$ следующим образом:

$$p = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{xy}{2y'}. \tag{25}$$

Обращая выражение (25), находим, что $\sqrt{y'} = \frac{xy}{2p}$. Следовательно,

$$F = \frac{x^2y^2}{2p}. \tag{26}$$

Вводим функцию Гамильтона по определению

$$H = y'F'_{y'} - F = \frac{x^2y^2}{4p}p - \frac{x^2y^2}{2p} = -\frac{x^2y^2}{4p}. \tag{27}$$

Осталось записать уравнение Эйлера в канонической форме:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{x^2y^2}{4p^2} = y', \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{x^2y}{2p} = -p'. \tag{28}$$

Задача решена.