ЛЕКЦИИ ПО МЕТОДАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (6 СЕМЕСТР)

А. А. Пожарский

Содержание

1, 2, 3 лекции
1. Обобщенные функции одной переменной 4
1.1. Пространство обобщенных функций 4
1.2. Регулярные обобщенные функции 5
1.3. Сингулярные обобщенные функции 6
1.4. Сложение обобщенных функций 7
1.5. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию 8
1.6. Дифференцирование обобщенных функций 8
1.7. Решение дифференциальных уравнений вида $y^{(n)}(x) = 0$ в D' 10
1.8. Общий вид обобщенной функции 11
1.9. Решение уравнений вида $x^n y = f(x)$ в D' 13
1.10. Замена переменных в обобщенных функциях 15
1.11. Сходимость в пространстве обобщенных функций 16
4, 5 лекции
2. Обобщенные функции нескольких переменных 19
2.1. Обобщенные функции нескольких переменных 19
2.2. Прямое произведение обобщенных функций 21
2.3. Свертка обобщенных функций 22
6, 7 лекция
3. Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений 26
3.1. Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений 26
3.2. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами 29
3.3. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с переменными коэффициентами 31
3.4. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля 33
8, 9 лекции
4. Обобщенные функции медленного роста 36
4.1. Пространство обобщенных функций медленного роста 36
4.2. Преобразование Фурье на классе Шварца 37
4.3. Преобразование Фурье на обобщенных функциях медленного роста 38
4.4. Метод Фурье решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R})$ 42
10, 11 лекции
5. Применение обобщенных функций к решению дифференциальных уравнений в частных производных 43

---
2 мая 2015 г.

5.1. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов в частных производных во всем пространстве 43
5.2. Фундаментальное решение оператора Лапласа 45
5.3. Фундаментальное решение оператора теплопроводности 48
5.4. Фундаментальное решение волнового оператора 49
5.5. Фундаментальное решение оператора Шредингера 52
12, 13, 14, 15, 16 лекции
6. Введение в задачи математической физики. 53
6.1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка 53
6.2. Формулы Грина 54
6.3. Краевые задачи для оператора Лапласа 55
6.4. Функция Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа 58
6.5. Функция Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в шаре (метод отражений) 62
6.6. Конформная инвариантность оператора Лапласа в $\mathbb{R}^2$ 63
6.7. Задача Коши для оператора теплопроводности во всем пространстве 64
6.8. Задача Коши для волнового уравнения во всем пространстве 68
6.9. Задача Коши для уравнения Шредингера во всем пространстве 71
6.10. Физическая интерпретация полученных результатов 72
17, 18, 19 лекции
7. Аналитическая теория дифференциальных уравнений 74
7.1. Поведение решений дифференциального уравнения в области регулярности его коэффициентов 74
7.2. Поведение решений линейного дифференциального уравнения в окрестности изолированной особой точки его коэффициентов 77
7.3. Теорема Фукса 80
7.4. Поведение решений линейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности бесконечности 82
7.5. Метод Лапласа построения интегрального представления для решения линейного дифференциального уравнения с линейными коэффициентами 84
7.6. Основные идеи исследования решений линейных дифференциальных уравнений с регулярными коэффициентами 86
20, 21, 22, 23, 24 лекции
8. Специальные функции 88
8.1. Уравнение Лежандра 88
8.2. Полиномы Лежандра 90
8.3. Присоединенные функции Лежандра 93
8.4. Сферические функции 95
8.5. Функция Бесселя 99
8.6. Функции Ханкеля и Неймана 104
8.7. Сингулярная задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя 107
25, 26, 27, 28 лекции
9. Метод разделения переменных 110
9.1. Основные идеи метода разделения переменных 110
9.2. Некоторые сведения о пространствах Соболева 112
9.3. Уравнение Пуассона в прямоугольнике 115

9.4. Уравнение Пуассона в круге 120
9.5. Уравнение Пуассона в шаре в $\mathbb{R}^3$ 122
9.6. Уравнение теплопроводности в ограниченной области 125
9.7. Волновое уравнение в ограниченной области 127
Литература
10. Список рекомендуемой литературы 131

1. Обобщенные функции одной переменной

1.1. Пространство обобщенных функций.

Определение 1.1 (Носитель непрерывной функции). *Носителем непрерывной функции φ называют множество*

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \mid \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Определение 1.2 (Пространство основных функций). *Пусть функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям*

- **бесконечная дифференцируемость:** $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$;
- **финитность носителя:** *существует* $R > 0$ *такое, что* $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]$.

Тогда функцию φ называют основной функцией.

- *Множество всех основных функций называют пространством основных функций, которое обозначают $D(\mathbb{R})$ или, сокращенно, D.*

Теорема 1.3 (Свойства основных функций). *Справедливы следующие утверждения.*

(1) $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, $b \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \in D$, $\psi \in D \Longrightarrow a\varphi + b\psi \in D$;
(2) $\varphi \in D \Longrightarrow \varphi' \in D$.

Доказательство. Очевидно. □

Определение 1.4 (Сходимость в смысле $D(\mathbb{R})$). *Говорят, что последовательность основных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ сходится при $n \to \infty$ к функции φ в смысле D, и пишут*

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} \varphi,$$

если

- *существует $R > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно, что* $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-R, R]$;
- *для любого $p \in \mathbb{Z}_+$ последовательность функций $\{\varphi_n^{(p)}\}_{n=1}^\infty$ сходится при $n \to \infty$ к функции $\varphi^{(p)}$ равномерно на $\mathbb{R}$.*

Теорема 1.5 (Существование гладкой срезки). *Пусть $-\infty < \alpha < a \leqslant b < \beta < +\infty$.*

Тогда существует функция χ такая, что

(1) $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$;
(2) $\forall\ x \in \mathbb{R}\ 0 \leqslant \chi(x) \leqslant 1$;
(3) $\forall\ x \in [a, b]\ \chi(x) = 1$;
(4) $\forall\ x \in \mathbb{R} \setminus (\alpha, \beta)\ \chi(x) = 0$.

Доказательство. Без доказательства. □

Определение 1.6 (Пространство обобщенных функций). *Пусть отображение*

$$f : D(\mathbb{R}) \ni \varphi \longmapsto (f, \varphi) \in \mathbb{C}$$

удовлетворяет условиям

- **линейность:** *для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R})$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ верно, что*
$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2);$$
- **непрерывность:** *для любой последовательности основных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ такой, что $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} 0$ верно, что $\lim\limits_{n\to\infty}(f, \varphi_n) = 0$.*

Тогда отображение f называют обобщенной функцией.

- *Множество всех обобщенных функций называют пространством обобщенных функций, которое обозначают $D'(\mathbb{R})$ или, сокращенно, D'.*

1.2. **Регулярные обобщенные функции.**

Определение 1.7 (Регулярные обобщенные функции)**.** *Обобщенную функцию f называют регулярной, если существует $F \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ такая, что*

$$\forall\ \varphi \in D \quad (f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\varphi(x)\,dx.$$

При этом функцию F называют ядром регулярной обобщенной функции f.

Теорема 1.8 (Общий вид регулярной обобщенной функции)**.** *Пусть $F \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, тогда отображение*

$$f : D(\mathbb{R}) \ni \varphi \longmapsto (f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\varphi(x)\,dx \in \mathbb{C}$$

является (регулярной) обобщенной функцией.

Доказательство. Проверим линейность отображения f. Для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R})$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ верно, что

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \int\limits_{\mathbb{R}} F(x)(\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x))\,dx =$$

$$= \alpha_1 \int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\varphi_1(x)\,dx + \alpha_2 \int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\varphi_2(x)\,dx = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2).$$

Проверим непрерывность отображения f. Пусть задана последовательность основных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} 0$. Из определения сходимости в D следует, что найдется $R > 0$ такое, что носители всех функций из последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежат отрезку $[-R, R]$. Из условия $F \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ следует, что

$$M \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-R}^{R} |F(x)|\,dx < \infty.$$

Пусть теперь задано произвольное $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ следует, что найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall\ n > N \qquad \max_{x\in[-R,R]} |\varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{M+1}.$$

Следовательно, для любого $n > N$ верно, что

$$|(f, \varphi_n)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\varphi_n(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{-R}^{R} F(x)\varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{-R}^{R} |F(x)||\varphi_n(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[-R,R]} |\varphi_n(x)| \int\limits_{-R}^{R} |F(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{M+1} M < \varepsilon. \ \square$$

Определение 1.9 (Нулевая обобщенная функция). *Нулевой обобщенной функцией называют регулярную обобщенную функцию вида*

$$\forall\ \varphi \in D \quad (0, \varphi) = 0.$$

Определение 1.10 (θ-функция). *θ-функцией называют регулярную обобщенную функцию вида*

$$\forall\ \varphi \in D \quad (\theta, \varphi) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

1.3. **Сингулярные обобщенные функции.**

Определение 1.11 (Сингулярные обобщенные функции). *Обобщенная функция называется сингулярной, если она не является регулярной.*

Определение 1.12 (δ-функция Дирака). *δ-функцией Дирака называют отображение вида*

$$\forall\ \varphi \in D \quad (\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

Теорема 1.13 (Сингулярность δ-функции Дирака). *δ-функция Дирака – сингулярная обобщенная функция.*

Доказательство. Факт $\delta \in D'$ легко следует из определения.

Доказательство сингулярности δ-функции Дирака проведем от противного. Пусть существует $F \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ такая, что

$$\forall\ \varphi \in D \quad (\delta, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1.1}$$

Из теоремы 1.5 следует, что найдется $\chi_\varepsilon \in D$ такая, что
(1) $\forall\ x \in \mathbb{R}\ 0 \leqslant \chi_\varepsilon(x) \leqslant 1$;
(2) $\forall\ x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\ \chi_\varepsilon(x) = 1$;
(3) $\forall\ x \in \mathbb{R} \setminus (-2\varepsilon, 2\varepsilon)\ \chi_\varepsilon(x) = 0$.

Отсюда и из (1.1) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\chi_\varepsilon(x)\,dx = (\delta, \chi_\varepsilon) = \chi_\varepsilon(0) = 1. \tag{1.2}$$

С другой стороны, из условия $F \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ следует, что

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\chi_\varepsilon(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} |F(x)|\,dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{1.3}$$

Сравнивая (1.2) и (1.3) приходим к противоречию. □

Определение 1.14 ($\delta(x-a)$). *Пусть $a \in \mathbb{R}$, тогда*

$$\forall\ \varphi \in D \quad (\delta(x-a), \varphi) = \varphi(a).$$

Определение 1.15 ($\mathcal{P}\frac{1}{x}$).

$$\forall\ \varphi \in D \quad \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Теорема 1.16 (Сингулярность $\mathcal{P}\frac{1}{x}$)**.** *$\mathcal{P}\frac{1}{x}$ – сингулярная обобщенная функция.*

Идея доказательства: Включение $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in D'$ примем без доказательства.

Доказательство сингулярности обобщенной функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ проведем от противного. Пусть существует $F \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ такая, что

$$\forall\ \varphi \in D \quad \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\varphi(x)\,dx.$$

Для любой $\varphi \in D$ верно, что $x\varphi(x) \in D$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} F(x)x\varphi(x)\,dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx. \tag{1.4}$$

Учитывая, что φ – произвольная основная функция, из (1.4) следует, что $xF(x) = 1$ при почти всех $x \in \mathbb{R}$. Однако, функция $F(x) = \frac{1}{x}$ не является суммируемой в окрестности нуля и, следовательно, не принадлежит $L_{1,loc}(\mathbb{R})$. □

Определение 1.17 ($\mathcal{P}\frac{1}{x^n}$)**.**

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \forall\ \varphi \in D \quad \left(\mathcal{P}\frac{1}{x^n}, \varphi\right) = v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-2} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k}{x^n}\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-2} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k}{x^n}\,dx.$$

Теорема 1.18 (Сингулярность $\mathcal{P}\frac{1}{x^n}$)**.** *При $n \in \mathbb{N}$ отображение $\mathcal{P}\frac{1}{x^n}$ – сингулярная обобщенная функция.*

Идея доказательства: Самостоятельно. □

1.4. **Сложение обобщенных функций.**

Мотивировка 1.19 (Сложение регулярных обобщенных функций)**.** *Пусть F и G – ядра регулярных обобщенных функций f и g, соответственно. Для локально суммируемых функций F и G корректно определена операция сложения и, следовательно, суммой регулярных обобщенных функций f и g естественно считать обобщенную функцию с ядром $(F+G)$. Отсюда,*

$$\forall\ \varphi \in D\ (f+g, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} (F(x)+G(x))\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\varphi(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}} G(x)\varphi(x)\,dx = (f,\varphi)+(g,\varphi).$$

Определение 1.20 (Сумма обобщенных функций)**.** *Суммой обобщенных функций f и g называют обобщенную функцию $f+g$, действующую по правилу*[1]

$$(f+g, \varphi) = (f,\varphi) + (g,\varphi).$$

Теорема 1.21 (Корректность определения суммы обобщенных функций)**.** *Пусть $f \in D'$ и $g \in D'$. Тогда $f+g \in D'$.*

Доказательство. Самостоятельно. □

[1] Легко проверить, что $(f+g) \in D'$.

1.5. **Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию.**

Мотивировка 1.22 (Умножение регулярной обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию)**.** *Пусть F – ядро регулярной обобщенной функций f и h – бесконечно дифференцируемая функция. Легко видеть, что произведения локально суммируемой функции F и бесконечно дифференцируемой функции h корректно определено, причем $F \cdot h$ – локально суммируемая функция. Следовательно, произведением $f \cdot h$ естественно считать обобщенную функцию с ядром $F \cdot h$. Отсюда,*

$$\forall\ \varphi \in D\ (f \cdot h, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} F(x)h(x)\varphi(x)\,dx = (f, h \cdot \varphi).$$

Здесь мы учли, что $h \cdot \varphi \in D$, см. теорему 1.3.

Определение 1.23 (Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию)**.** *Произведением обобщенной функций f и бесконечно дифференцируемой функции h называют обобщенную функцию $f \cdot h$, действующую по правилу*

$$(f \cdot h, \varphi) = (f, h \cdot \varphi).$$

Теорема 1.24 (Корректность определения произведения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию)**.** *Пусть $f \in D'$ и $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Тогда $f \cdot h \in D'$.*

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Пример 1.25. *Доказать, что $x\delta(x) = 0$.*

Решение. Легко видеть, что

$$\forall\ \varphi \in D \quad (x\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), x\varphi(x)) = 0.\ \square$$

Пример 1.26. *Доказать, что $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$.*

Решение. Легко видеть, что

$$\forall\ \varphi \in D \quad \left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx.\ \square$$

Пример 1.27. *Доказать, что $x\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x}$.*

$$\forall\ \varphi \in D \quad \left(x\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, x\varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi(x) - 0\varphi(0)}{x^2}\,dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right).\ \square$$

1.6. **Дифференцирование обобщенных функций.**

Мотивировка 1.28 (Производная гладкой регулярной обобщенной функции)**.** *Пусть F – ядро регулярной обобщенной функций f и $F \in C^1(\mathbb{R})$. Ясно, что F' – локально суммируемая функция, которую естественно считать ядром производной обобщенной функции f. Следовательно,*

$$\forall\ \varphi \in D\ (f', \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} F'(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,dx = -(f, \varphi').$$

Здесь мы учли, что $\varphi' \in D$, см. теорему 1.3.

Определение 1.29 (Производная обобщенной функции). *Производной обобщенной функций f называют обобщенную функцию f', действующую по правилу*

$$\forall\ \varphi \in D \quad (f', \varphi) = -(f, \varphi').$$

Теорема 1.30 (Корректность определения производной обобщенной функции). *Пусть $f \in D'$. Тогда $f' \in D'$.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Задача 1.31. *Доказать, что $\theta'(x) = \delta(x)$.*

Решение. Легко видеть, что

$$\forall\ \varphi \in D \quad (\theta'(x), \varphi(x)) = -(\theta(x), \varphi'(x)) = -\int\limits_0^\infty \varphi'(x) = -\varphi(x)\Big|_0^\infty = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)). \ \square$$

Пример 1.32. *Доказать, что $(\ln|x|)' = \mathcal{P}\frac{1}{x}$.*

Решение. Заметим, что $\ln|x|$ – регулярная обобщенная функция. Следовательно,

$$\forall\ \varphi \in D \qquad ((\ln|x|)', \varphi(x)) = -(\ln|x|, \varphi'(x)) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)\,dx - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \ln|x|\varphi'(x)\,dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\ln|x|\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} (\ln|x|)'\varphi(x)\,dx - \ln|x|\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} (\ln|x|)'\varphi(x)\,dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|\varepsilon|\Big(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)\Big) + \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(O(\varepsilon\ln|\varepsilon|) + \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right). \ \square$$

Задача 1.33. *Доказать, что $\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^n}\right)' = -n\mathcal{P}\frac{1}{x^{n+1}}$ при $n \in \mathbb{N}$.*

Пример 1.34. *Упростить выражение $e^{2x}\delta'(x)$.*

Решение. Легко видеть, что

$$\forall\ \varphi \in D \qquad (e^{2x}\delta'(x), \varphi(x)) = (\delta'(x), e^{2x}\varphi(x)) = -\Big(\delta(x), (e^{2x}\varphi(x))'\Big) =$$

$$= -\Big(\delta(x), 2e^{2x}\varphi(x) + e^{2x}\varphi'(x)\Big) = -2\varphi(0) - \varphi'(0) = -(\delta(x), 2\varphi(x)) - (\delta(x), \varphi'(x)) =$$

$$= -(2\delta(x), \varphi(x)) + (\delta'(x), \varphi(x)) = (\delta'(x) - 2\delta(x), \varphi(x)).$$

Следовательно, $e^{2x}\delta'(x) = \delta'(x) - 2\delta(x)$. □

Пример 1.35. *Доказать, что $x\delta^{(n)}(x) = -n\delta^{(n-1)}(x)$ при $n \in \mathbb{N}$.*

Решение. Легко видеть, что

$$\forall\ \varphi \in D \qquad (x\delta^{(n)}(x), \varphi(x)) = (\delta^{(n)}(x), x\varphi(x)) = (-1)^n(\delta(x), (x\varphi(x))^{(n)}) =$$
$$= (-1)^n(\delta(x), n\varphi^{(n-1)}(x) + x\varphi^{(n)}(x)) = (-1)^n(\delta(x), n\varphi^{(n-1)}(x)) = -(n\delta^{(n-1)}(x), \varphi(x)). \ \square$$

Теорема 1.36 (Дифференцирование скачков в смысле D')**.** *Пусть*

- *F – ядро регулярной обобщенной функции f;*
- *$F \in C^1(-\infty, a) \cap C^1(a, \infty)$, где $a \in \mathbb{R}$;*
- *существуют пределы $F(a+0)$ и $F(a-0)$.*

Тогда $f'(x) = f'_{cl}(x) + \Big(F(a+0) - F(a-0)\Big)\delta(x-a)$, где $f'_{cl}(x)$ – регулярная обобщенная функция с ядром $F'(x)$, а $F'(x)$ – классическая производная от функции $F(x)$.

Доказательство. Используя определение производной в смысле D' и интегрирование по частям, получим

$$\forall\ \varphi \in D \qquad (f'(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi'(x)) = -\int\limits_{-\infty}^{a} F(x)\varphi'(x)\,dx - \int\limits_{a}^{\infty} F(x)\varphi'(x)\,dx =$$
$$= -F(a-0)\varphi(a) + \int\limits_{-\infty}^{a} F'(x)\varphi(x)\,dx + F(a+0)\varphi(a) + \int\limits_{a}^{\infty} F'(x)\varphi(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} F'(x)\varphi(x)\,dx + (F(a+0) - F(a-0))\varphi(a) =$$
$$= (f'_{cl}(x), \varphi(x)) + \Big((F(a+0) - F(a-0))\delta(x-a), \varphi(x)\Big).\square$$

Пример 1.37. *Вычислить третью производную регулярной обобщенной функции f с ядром*

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ x^2 + 3, & x \in [0, 2], \\ x - 3, & x > 2. \end{cases}$$

Решение. Из теоремы 1.36 следует, что

$$f'(x) = 2\delta(x) - 8\delta(x-2) + \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, & x \in [0, 2], \\ 1, & x > 2, \end{cases}$$

$$f''(x) = 2\delta'(x) - 8\delta'(x-2) - 3\delta(x-2) + \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2, & x \in [0, 2], \\ 0, & x > 2, \end{cases}$$

$$f'''(x) = 2\delta''(x) - 8\delta''(x-2) - 3\delta'(x-2) + 2\delta(x) - 2\delta(x-2). \ \square$$

1.7. Решение дифференциальных уравнений вида $y^{(n)}(x) = 0$ в D'.

Теорема 1.38 (Общий вид решения уравнения $y' = 0$ в D')**.** *Общее решение уравнения $y' = 0$ в D' имеет вид $y = C$, где $C \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Рассмотрим основную функцию ω, удовлетворяющую условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \omega(x)\,dx = 1.$$

Пусть φ – произвольная основная функция. Рассмотрим функцию вида

$$\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt - \int\limits_{-\infty}^{x} \omega(t)\,dt \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt. \tag{1.5}$$

Легко видеть, что $\psi \in D$. Пусть теперь y – решение уравнения $y' = 0$ в D'. Отсюда и из (1.5) получим, что

$$0 = (y', \psi) = -(y, \psi') = -(y, \varphi) + (y, \omega) \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$(y, \varphi) = (y, \omega) \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt = (C, \varphi), \tag{1.6}$$

где $C = (y, \omega) \in \mathbb{C}$. Учитывая, что равенство (1.6) справедливо для любой $\varphi \in D$, получим, что $y = C$ для некоторой $C \in \mathbb{C}$. $\square$

Теорема 1.39 (Общий вид решения уравнения $y^{(n)} = 0$ в D')**.** *Общее решение уравнения $y^{(n)} = 0$ в D' при $n \in \mathbb{N}$ имеет вид $y = p_{n-1}(x)$, где p_{n-1} – произвольный полином степени $(n-1)$.*

Доказательство. Из теоремы 1.36 следует, что любой полином степени $(n-1)$ удовлетворяет уравнению $y^{(n)} = 0$ в D'.

Дальнейшее доказательство проведем по индукции. База индукции ($n = 1$) доказана в теореме 1.38. Пусть утверждение настоящей теоремы верно при $n = s \in \mathbb{N}$.

Пусть y – решение уравнения $y^{(s+1)} = 0$ в D'. Докажем, что y – полином степени s. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию $z = y'$. Заметим, что z удовлетворяет уравнению $z^{(s)} = 0$, откуда следует, что z – полином степени $(s-1)$. Таким образом, y удовлетворяет уравнению

$$y' = z, \tag{1.7}$$

где z – полином степени $(s-1)$. Обозначим через p_s – полином степени s такой, что $p_s' = z$.

Решение уравнения (1.7) будем искать в виде

$$y = p_s + f. \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.7) получим, что $f' = 0$. Отсюда и из теоремы 1.36 следует, что f – постоянная функция. Принимая во внимание (1.8), приходим к выводу, что y – полином степени s. $\square$

1.8. **Общий вид обобщенной функции.**

Определение 1.40 (Носитель обобщенной функции)**.**

- *Говорят, что обобщенная функция f обращается в ноль на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$, если для любой $\varphi \in D$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \subset (a, b)$ верно, что $(f, \varphi) = 0$. В этом случае пишут $f|_{(a,b)} = 0$.*
- *Носителем обобщенной функции f называют множество*

$$\operatorname{supp} f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\{(a,b)\,|\,f|_{(a,b)}=0\}} (a, b).$$

Теорема 1.41 (Общий вид обобщенной функции)**.** *Пусть*

- $f \in D'$;
- K – *ограниченная область в* $\mathbb{R}$.

Тогда существуют регулярная обобщенная функция g с непрерывным ядром G и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $f|_K = g^{(n)}|_K$. Другими словами, для любой $\varphi \in D$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ *справедливо равенство*

$$(f, \varphi) = (-1)^n \int\limits_{\mathbb{R}} G(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx.$$

Доказательство. Без доказательства. □

Задача 1.42. *Докажите, что для обобщенной функции*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{(k)}(x-k)$$

не существует регулярной обобщенной функции g и $n \in \mathbb{N}$ таких, что $f = g^{(n)}$.

Теорема 1.43 (Общий вид обобщенной функции с носителем сосредоточенным в точке)**.** *Пусть*

- $f \in D'$;
- $\operatorname{supp} f = \{a\}$, *где* $a \in \mathbb{R}$.

Тогда существуют $s \in \mathbb{Z}_+$ и постоянные c_0, c_1, …, c_s такие, что

$$f = \sum_{k=0}^{s} c_k \delta^{(k)}(x-a).$$

Доказательство. Из теоремы 1.41 следует, что найдутся $n \in \mathbb{N}$ и регулярная обобщенная функция g с непрерывным ядром G такие, что $f = g^{(n)}$.

На интервале $(-\infty, a)$ функция f обращается в ноль, следовательно, $g^{(n)} = 0$ на $(-\infty, a)$. Отсюда и из теоремы 1.39 следует, что на интервале $(-\infty, a)$ обобщенная функция g совпадает с некоторым полиномом степени $(n-1)$, который мы обозначим через p_l. Аналогично, получим, что на интервале $(a, +\infty)$ обобщенная функция g совпадает с полиномом степени $(n-1)$, который мы обозначим через p_r. Учитывая, что g – регулярная обобщенная функция, получим

$$g(x) = p_l(x)\theta(a-x) + p_r(x)\theta(x-a).$$

Из теоремы 1.36 следует, что

$$\begin{aligned}
g'(x) &= p_l'(x)\theta(a-x) + p_r'(x)\theta(x-a) + \Big[p_r(a+0) - p_l(a-0)\Big]\delta(x-a), \\
g''(x) &= p_l''(x)\theta(a-x) + p_r''(x)\theta(x-a) + \Big[p_r'(a+0) - p_l'(a-0)\Big]\delta(x-a) + \\
&+ \Big[p_r(a+0) - p_l(a-0)\Big]\delta'(x-a), \\
&\dots \\
g^{(n)}(x) &= \Big[p_r^{(n-1)}(a+0) - p_l^{(n-1)}(a-0)\Big]\delta(x-a) + \ldots + \Big[p_r(a+0) - p_l(a-0)\Big]\delta^{(n-1)}(x-a). \ \square
\end{aligned}$$

1.9. **Решение уравнений вида $x^n y = f(x)$ в D'.**

Теорема 1.44 (Общее решение уравнения $xy = 0$)**.** *Общее решение уравнения $xy = 0$ в D' имеет вид $y(x) = C\delta(x)$, где $C \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Для начала докажем, что носитель любого решения уравнения

$$xy = 0 \tag{1.9}$$

сосредоточен в нуле. Для этого достаточно показать, что для любой основной функции φ такой, что

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(другими словами, обращающейся в ноль в некоторой окрестности точки ноль), верно, что

$$(y, \varphi) = 0.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$. Легко видеть, что $\psi \in D$, откуда

$$(y, \varphi) = (y, x\psi) = (xy, \psi) = 0.$$

Таким образом, $\operatorname{supp} y = \{0\}$.

Из свойства $\operatorname{supp} y = \{0\}$ и теоремы 1.43 следует, что существуют $s \in \mathbb{Z}_+$ и постоянные c_0, c_1, …, c_s такие, что

$$y = \sum_{k=0}^{s} c_k \delta^{(k)}(x). \tag{1.10}$$

Подставляя (1.10) в уравнение (1.9) и, используя результат примера 1.35, получим, что

$$0 = xy = \sum_{k=0}^{s} c_k x\delta^{(k)}(x) = c_0 x\delta(x) + \sum_{k=1}^{s} c_k x\delta^{(k)}(x) = -\sum_{k=1}^{s} c_k k\delta^{(k-1)}(x).$$

Другими словами,

$$c_1\delta(x) + 2c_2\delta'(x) + \ldots + sc_s\delta^{(s-1)}(x) = 0. \tag{1.11}$$

Из получим, что $c_1 = c_2 = \ldots = c_s = 0$. Отсюда и из (1.10) следует, что общее решение уравнения (1.9) имеет вид $y = c_0\delta(x)$. □

Теорема 1.45 (Общее решение уравнения $x^n y = 0$)**.** *Общее решение уравнения $x^n y = 0$ в D' при $n \in \mathbb{N}$ имеет вид*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(x),$$

где c_0, c_1, …, c_{n-1} – произвольные постоянные.

Доказательство. Самостоятельно. Доказательство проводится по индукции. Индукционный переход выполняется с помощью введения новой неизвестной функции $z(x) = xy(x)$. □

Теорема 1.46 (Общее решение уравнения $xy = f$)**.** *Пусть $f \in D'$, тогда*

(1) *уравнение $xy = f$ разрешимо в D';*
(2) *общее решение уравнения $xy = f$ в D' имеет вид $y = y_p + y_o$, где*
   - *y_p – частное решение неоднородного уравнения $xy = f$,*
   - *y_o – общее решение однородного уравнения $xy = 0$ (т. е. $y_o = C\delta$, где $C \in \mathbb{C}$).*

Доказательство. (1) Пусть $h \in D$ такая, что $h(x) = 1$ при $x \in [-1, 1]$. Рассмотрим отображение вида

$$\forall\ \varphi \in D \quad (y_p, \varphi) = \left(f(x), \frac{\varphi(x) - \varphi(0)h(x)}{x} \right). \tag{1.12}$$

Легко видеть, что $y_p \in D'$. Вместе с этим,

$$\forall\ \varphi \in D \quad (xy_p(x), \varphi(x)) = (y_p(x), x\varphi(x)) = \left(f(x), \frac{x\varphi(x) - 0\varphi(0)h(x)}{x} \right) = (f, \varphi).$$

Таким образом, y_p – решение уравнения $xy = f$.

(2) Пусть y – решение уравнения $xy = f$. Выполняя подстановку

$$y = y_p + y_o, \tag{1.13}$$

где y_p определена формулой (1.12), в уравнении $xy = f$, получим

$$x(y_p + y_o) = f \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{xy_p}_{=f} + xy_o = f \quad \Longrightarrow \quad xy_o = 0.$$

Что и требовалось доказать. □

Пример 1.47. *Найти общее решение уравнения $xy = f(x)$ в D', где $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Заметим, что частное решение неоднородного уравнения

$$xy = f(x) \tag{1.14}$$

имеет вид

$$y_p(x) = f(x)\mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Действительно,

$$\forall\ \varphi \in D \quad (xy_p(x), \varphi(x)) = (y_p(x), x\varphi(x)) = \left(f(x)\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x) \right) =$$

$$= \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, xf(x)\varphi(x) \right) = (1, f(x)\varphi(x)) = (f(x), \varphi(x)).$$

Шаг 2. Из теоремы 1.44 следует, что общее решение однородного уравнения $xy = 0$ имеет вид $y_o(x) = C\delta(x)$, где $C \in \mathbb{C}$.

Шаг 3. Общее решение уравнения (1.14) в D' имеет вид $y = y_p + y_o$.

Ответ: $y = f(x)\mathcal{P}\frac{1}{x} + C\delta(x)$, $C \in \mathbb{C}$.

Пример 1.48. *Найти общее решение уравнения $xy = \delta(x)$ в D'.*

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Заметим, что частное решение неоднородного уравнения

$$xy = \delta(x) \tag{1.15}$$

имеет вид

$$y_p(x) = -\delta'(x).$$

Действительно, из примера 1.35 следует, что

$$xy_p(x) = -x\delta'(x) = \delta(x).$$

Шаг 2. Из теоремы 1.44 следует, что общее решение однородного уравнения $xy = 0$ имеет вид $y_o(x) = C\delta(x)$, где $C \in \mathbb{C}$.

Шаг 3. Общее решение уравнения (1.14) в D' имеет вид $y = y_p + y_o$.

Ответ: $y = -\delta'(x) + C\delta(x)$, $C \in \mathbb{C}$.

Теорема 1.49 (Общее решение уравнения $x^n y = f$)**.** *Пусть $f \in D'$ и $n \in \mathbb{N}$, тогда*

(1) *уравнение $x^n y = f$ разрешимо в D';*

(2) *общее решение уравнения $x^n y = f$ в D' имеет вид $y = y_p + y_o$, где*
   - *y_p – частное решение неоднородного уравнения $x^n y = f$,*
   - *y_o – общее решение однородного уравнения $x^n y = 0$ (см. теорему 1.45).*

Доказательство. Самостоятельно. □

Пример 1.50. *Найти общее решение уравнения $x^n y = 1$ в D' при $n \in \mathbb{N}$.*

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Заметим, что частное решение неоднородного уравнения

$$x^n y = 1 \tag{1.16}$$

имеет вид

$$y_p(x) = \mathcal{P}\frac{1}{x^n}.$$

Действительно,

$$\forall\ \varphi \in D \qquad (x^n y_p(x), \varphi(x)) = (y_p(x), x^n\varphi(x)) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x^n}, x^n\varphi(x)\right) =$$

$$= v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x^n\varphi(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-2} \frac{(x^n\varphi)^{(k)}(0)}{k!} x^k}{x^n}\, dx = v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x^n\varphi(x) - 0}{x^n}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = (1, \varphi(x)).$$

Шаг 2. Из теоремы 1.45 следует, что общее решение однородного уравнения $x^n y = 0$ имеет вид

$$y_o(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(x),$$

где c_0, c_1, …, c_{n-1} – произвольные постоянные.

Шаг 3. Общее решение уравнения (1.16) в D' имеет вид $y = y_p + y_o$.

Ответ: $y = \mathcal{P}\frac{1}{x^n} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(x)$, где $c_0 \in \mathbb{C}$, $c_1 \in \mathbb{C}$, …, $c_{n-1} \in \mathbb{C}$.

1.10. Замена переменных в обобщенных функциях.

Мотивировка 1.51 (Замена переменных в регулярной обобщенной функции)**.** *Пусть F – ядро регулярной обобщенной функций f, A – диффеоморфизм класса C^∞ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ и $B = A^{-1}$. Легко видеть, что*

$$\forall\ \varphi \in D\ (f(A(x)), \varphi(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}} F(A(x))\varphi(x)\, dx = [t = A(x), x = B(t)] = \int\limits_{\mathbb{R}} F(t)\varphi(B(t))|B'(t)|\, dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} F(t)\frac{\varphi(B(t))}{|A'(B(t))|}\, dt = \left(f(t), \frac{\varphi(B(t))}{|A'(B(t))|}\right).$$

Определение 1.52 (Замена переменных в обобщенной функции)**.** *Пусть* $f \in D'$, A *– диффеоморфизм класса* C^∞ *из* $\mathbb{R}$ *в* $\mathbb{R}$ *и* $B = A^{-1}$.

$$\forall\ \varphi \in D \quad (f(A(x)), \varphi(x)) = \left(f(t), \frac{\varphi(B(t))}{|A'(B(t))|}\right).$$

Пример 1.53. *Упростить выражение* $\delta(ax)$, *где* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Решение. Из определения 1.52 следует, что

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x). \ \square$$

Пример 1.54. *Упростить выражение* $\delta(2x+4)$.

Решение. Из определения 1.52 следует, что

$$\delta(2x+4) = \delta(2(x+2)) = \frac{1}{2}\delta(x+2). \ \square$$

1.11. **Сходимость в пространстве обобщенных функций.**

Определение 1.55 (Сходимость в смысле D')**.** *Говорят, что последовательность обобщенных функций* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *сходится при* $n \to \infty$ *к обобщенной функции* f *в смысле* D', *и пишут*

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{D'} f,$$

если

$$\forall\ \varphi \in D \quad \lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi).$$

Теорема 1.56 (Предельный переход под знаком производной в D')**.**

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{D'} f \quad \Longrightarrow \quad f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{D'} f'.$$

Доказательство. Из определения 1.55 следует, что

$$f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{D'} f' \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\ \varphi \in D\ (f_n', \varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f', \varphi) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\ \varphi \in D\ (f_n, \varphi') \xrightarrow[n\to\infty]{} (f, \varphi').$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что $(f_n, \varphi') \xrightarrow[n\to\infty]{} (f, \varphi')$ в силу $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{D'} f$. $\square$

Пример 1.57. *Заметим, что*

$$\frac{\sin(nx)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{D'} 0.$$

Отсюда и из теоремы 1.56 *следует, что*

$$\cos(nx) \xrightarrow[n\to\infty]{D'} 0.$$

При этом в классическом смысле последовательность $\cos(nx)$ *не имеет предела при* $n \to \infty$.

Теорема 1.58 (Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла)**.** *Пусть*

- $F \in L_1(\mathbb{R})$ *и* $F_n \in L_1(\mathbb{R})$ *при* $n \in \mathbb{N}$;
- *при почти всех* $x \in \mathbb{R}$ *существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$;
- **существование локально суммируемой мажоранты:** *существует* $G \in L_1(\mathbb{R})$ *такая, что для любого* $n \in \mathbb{N}$ *и при почти всех* $x \in \mathbb{R}$ *верно, что* $|F_n(x)| \leqslant G(x)$.

Тогда

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} F_n(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\,dx.$$

Доказательство. Без доказательства. □

Теорема 1.59 (Теорема Лебега о предельном переходе в D'). *Пусть*

- f *– регулярная обобщенная функция с ядром* F*;*
- f_n *– регулярная обобщенная функция с ядром* F_n*, где* $n \in \mathbb{N}$*;*
- *при почти всех* $x \in \mathbb{R}$ *существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$*;*
- **существование локально суммируемой мажоранты:** *существует* $G \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ *такая, что для любого* $n \in \mathbb{N}$ *и при почти всех* $x \in \mathbb{R}$ *верно, что* $|F_n(x)| \leqslant G(x)$*.*

Тогда $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{D'} f$*.*

Доказательство. Следует из теоремы 1.58. □

Теорема 1.60 (Отрицательный пример к теореме Лебега). *Условие существования локально суммируемой мажоранты не может быть отброшено в теореме Лебега.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность вида

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad F_n(x) = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0, & x \notin (0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Легко видеть, что F_n для любого $x \in \mathbb{R}$ стремится к нулю при $n \to \infty$ (т. е. в теореме Лебега необходимо считать, что $f = 0$).

Рассмотрим теперь основную функцию φ, которая равна единице на интервале $(-1, 1)$. Легко видеть, что

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{1}{n}} n\,dx = 1.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi) = 1 \neq 0 = (f, \varphi). \ \square$$

Определение 1.61 (δ-образная последовательность). *Последовательность регулярных обобщенных функций* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется* δ*-образной, если она сходится к* δ*-функции.*

Теорема 1.62 (δ-образная последовательность (достаточное условие)). *Пусть*

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$ f_n *– регулярная обобщенная функция с ядром* F_n*;*
- *существует постоянная* $C > 0$ *такая, что для любого интервала* (a, b) *верно, что*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \left|\int\limits_a^b F_n(x)\,dx\right| \leqslant C;$$

- *для любого* (a, b) *такого, что* $0 \in (a, b)$ *верно, что*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b F_n(x)\,dx = 1;$$

- *для любого* $[a,b]$ *такого, что* $0 \notin [a,b]$ *верно, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b F_n(x)\,dx = 0.$$

Тогда $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *–* δ*-образная последовательность.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность обобщенных функций $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ядрами

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad G_n(x) = \int\limits_{-1}^{x} F_n(t)\,dt.$$

Заметим теперь, что последовательность $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на любом отрезке и при $x \neq 0$ верно, что

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \theta(x).$$

Отсюда и из теоремы Лебега 1.59 следует, что $g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{D'} \theta(x)$.

Далее из теоремы 1.56 следует, что $g_n'(x) \xrightarrow[n\to\infty]{D'} \theta'(x)$. Другими словами, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{D'} \delta(x)$. $\square$

Теорема 1.63 (Пример δ-образной последовательности)**.** *Пусть* $G_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\, e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}$ *– ядро регулярной обобщенной функции* g_ε *при* $\varepsilon > 0$.

Тогда g_ε *–* δ*-образная последовательность при* $\varepsilon \to +0$.

Доказательство. Следует из теоремы 1.62. $\square$

2. Обобщенные функции нескольких переменных

2.1. Обобщенные функции нескольких переменных.

Определение 2.1 (Пространство основных функций $D(\mathbb{R}^n)$)**.** *Пусть функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, где $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям*

- **бесконечная дифференцируемость:** *$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;*
- **финитность носителя:** *существует шар $B_R = \{x \mid |x| < R\}$ радиуса $R > 0$ такой, что $\operatorname{supp} \varphi \subset B_R$.*

Тогда функцию φ называют основной функцией.

- *Множество всех основных функций называют пространством основных функций, которое обозначают $D(\mathbb{R}^n)$.*

Определение 2.2 (Производная основной функции $D(\mathbb{R}^n)$)**.** *Пусть*

- *$\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, где $n \in \mathbb{N}$;*
- *$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$.*

Производной порядка α функции φ называют выражение вида

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

Теорема 2.3 (Существование гладкой срезки в $\mathbb{R}^n$)**.** *Пусть*

- *U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$;*
- *K – компакт (ограниченное замкнутое множество) в $\mathbb{R}^n$;*
- *$K \subset U$.*

Тогда существует функция $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что

(1) *$\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;*
(2) *$\forall\ x \in \mathbb{R}^n\ 0 \leqslant \chi(x) \leqslant 1$;*
(3) *$\forall\ x \in K\ \chi(x) = 1$;*
(4) *$\forall\ x \in \mathbb{R} \setminus U\ \chi(x) = 0$.*

Доказательство. Без доказательства. □

Определение 2.4 (Пространство обобщенных функций $D'(\mathbb{R}^n)$)**.** *Пусть отображение*

$$f : D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \longmapsto (f, \varphi) \in \mathbb{C}$$

удовлетворяет условиям

- **линейность:** *для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ верно, что*

$$(f, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 (f, \varphi_1) + \alpha_2 (f, \varphi_2);$$

- **непрерывность:** *для любой последовательности основных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ такой, что $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{D} 0$ верно, что $\lim\limits_{k\to\infty} (f, \varphi_k) = 0$.*

Тогда отображение f называют обобщенной функцией.

- *Множество всех обобщенных функций называют пространством обобщенных функций, которое обозначают $D'(\mathbb{R}^n)$.*

Определение 2.5 (Производная обобщенной функции из $D'(\mathbb{R}^n)$)**.** *Производной обобщенной функций $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ порядка $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ называют обобщенную функцию $D^\alpha f$, действующую по правилу*

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi).$$

Теорема 2.6 (Общий вид обобщенной функции из $D'(\mathbb{R}^n)$)**.** *Пусть*

- *$f \in D'(\mathbb{R}^n)$;*
- *K – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.*

Тогда существуют регулярная обобщенная функция g с непрерывным ядром G и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ такие, что $f|_K = D^\alpha g|_K$. Другими словами, для любой $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ *справедливо равенство*

$$(f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx.$$

Доказательство. Без доказательства. □

Определение 2.7 (θ-функция в $D'(\mathbb{R}^n)$)**.** *θ-функцией в $D'(\mathbb{R}^n)$, где $n \in \mathbb{N}$, называют регулярную обобщенную функцию вида*

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (\theta, \varphi) = \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \dots \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

Определение 2.8 (δ-функция Дирака в $D'(\mathbb{R}^n)$)**.** *δ-функцией Дирака в $D'(\mathbb{R}^n)$, где $n \in \mathbb{N}$, называют отображение вида*

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

Пример 2.9. *Доказать, что при $n \in \mathbb{N}$ верно равенство*

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Решение. Доказательство вполне аналогично одномерному случаю. □

Определение 2.10 (δ-функция сосредоточенная на поверхности в $\mathbb{R}^3$)**.** *Пусть S – гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$. Тогда δ-функцией сосредоточенной на поверхности S называют сингулярную обобщенную функцию вида*

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^3) \quad (\delta_S, \varphi) = \iint\limits_S \varphi(x_1, x_2, x_3)\, dS.$$

Определение 2.11 (Замена переменных в обобщенной функции из $D'(\mathbb{R}^n)$)**.** *Пусть $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ и A – диффеоморфизм класса C^∞ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и $B = A^{-1}$.*

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (f(A(x)), \varphi(x)) = \left(f(t), \frac{\varphi(B(t))}{|\det A'(B(t))|} \right).$$

Замечание 2.12. *Замена переменных обобщается на случай, когда A – диффеоморфизм некоторой окрестности носителя обобщенной функции на образ.*

2.2. **Прямое произведение обобщенных функций.**

Мотивировка 2.13 (Прямое произведение регулярных обобщенных функций)**.** *Пусть F – ядро регулярной обобщенной функций $f \in D'(\mathbb{R}^n)$, где $n \in \mathbb{N}$ и G – ядро регулярной обобщенной функций $g \in D'(\mathbb{R}^m)$, где $m \in \mathbb{N}$. Прямым произведением f и g естественно считать регулярную обобщенную функцию из $D'(\mathbb{R}^{n+m})$ с ядром $F(x)G(y)$. Легко видеть, что,*

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^{n+m}) \quad (f(x)\cdot g(y), \varphi(x,y)) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} F(x)G(y)\varphi(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} G(y)\varphi(x,y)\,dx \right) dy = (f,(g,\varphi)).$$

Определение 2.14 (Прямое произведение обобщенных функций)**.** *Пусть*

- $f \in D'(\mathbb{R}^n)$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $g \in D'(\mathbb{R}^m)$, *где* $m \in \mathbb{N}$.

Прямым произведением $f \cdot g$ называют обобщенную функцию из $D'(\mathbb{R}^{n+m})$, действующую по правилу

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^{n+m}) \quad (f(x)\cdot g(y), \varphi(x,y)) = (f(x),(g(y),\varphi(x,y))).$$

Теорема 2.15 (Корректность определения прямого произведения обобщенных функций)**.** *Для любых $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ и $g \in D'(\mathbb{R}^m)$, где $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ верно, что $f \cdot g \in D'(\mathbb{R}^{n+m})$.*

Доказательство. Обратим внимание, что для доказательства теоремы необходимо проверить, что $(g(y),\varphi(x,y))$ – основная функция от переменной x, а $f \cdot g$ – непрерывное отображение.
Без доказательства. □

Пример 2.16. *Доказать, что $\delta(x,y) = \delta(x)\cdot\delta(y)$.*

Решение. Легко видеть, что

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^2) \quad (\delta(x)\cdot\delta(y), \varphi(x,y)) = (\delta(x),(\delta(y),\varphi(x,y))) = (\delta(x),\varphi(x,0)) =$$
$$= \varphi(0,0) = (\delta(x,y),\varphi(x,y)).\ \square$$

Теорема 2.17 (Свойства прямого произведения обобщенных функций)**.** *Пусть*

- $f \in D'(\mathbb{R}^n)$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $g \in D'(\mathbb{R}^m)$, *где* $m \in \mathbb{N}$;
- $h \in D'(\mathbb{R}^k)$, *где* $k \in \mathbb{N}$.

Тогда

(1) $f(x)\cdot g(y) = g(y)\cdot f(x)$;
(2) $D_x^\alpha(f(x)\cdot g(y)) = (D_x^\alpha f(x))\cdot g(y)$, *где* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$;
(3) $(f(x)\cdot g(y))\cdot h(z) = f(x)\cdot(g(y)\cdot h(z))$.

Доказательство. (1) Фиксируем произвольную основную функцию φ из $D(\mathbb{R}^{n+m})$. Из финитности носителя φ следует, что найдется $R > 0$ такое, что $\operatorname{supp}\varphi \in [-R,R]^{n+m}$. Из теоремы 2.6 следует, что найдутся регулярная обобщенная функция $\hat{f}$ с непрерывным ядром $\hat{F}$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ такие, что $f|_{K_n} = D^\alpha \hat{f}|_{K_n}$, где $K_n = [-R,R]^n$, а также регулярная обобщенная функция $\hat{g}$

с непрерывным ядром $\hat{G}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^m$ такие, что $g|_{K_m} = D^\beta \hat{g}|_{K_m}$, где $K_m = [-R,R]^m$. Отсюда следует, что

$$(f(x)\cdot g(y), \varphi(x,y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x,y))) = \Big(D_x^\alpha \hat{f}(x)\left(D_y^\beta \hat{g}(y), \varphi(x,y)\right)\Big) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\Big(\hat{f}(x), D_x^\alpha\left(\hat{g}(y), D_y^\beta \varphi(x,y)\right)\Big) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\Big(\hat{f}(x), \left(\hat{g}(y), D_x^\alpha D_y^\beta \varphi(x,y)\right)\Big) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{F}(x)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \hat{G}(y) D_x^\alpha D_y^\beta \varphi(x,y)\,dy\right)dx =$$
$$= (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \hat{G}(y)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \hat{F}(x) D_x^\alpha D_y^\beta \varphi(x,y)\,dx\right)dy = (g(y)\cdot f(x), \varphi(x,y)).$$

(2) Легко видеть, что

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^{n+m}) \qquad \left(D_x^\alpha\Big(f(x)\cdot g(y)\Big), \varphi(x,y)\right) = (-1)^{|\alpha|}\Big(f(x)\cdot g(y), D_x^\alpha \varphi(x,y)\Big) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\Big(f(x), (g(y), D_x^\alpha\varphi(x,y))\Big) = (-1)^{|\alpha|}\Big(f(x), D_x^\alpha(g(y), \varphi(x,y))\Big) =$$
$$= \left(D_x^\alpha f(x), \Big(g(y), \varphi(x,y)\Big)\right) = \left(\Big(D_x^\alpha f(x)\Big)\cdot g(y), \varphi(x,y)\right).$$

(3) Доказывается аналогично свойству (1). □

2.3. **Свертка обобщенных функций.**

Определение 2.18 (Свертка классических функций)**.** *Сверткой классических функций $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называют функцию вида*

$$F*G(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F(y)G(x-y)\,dy,$$

при условии, что последний интеграл сходится при почти всех $x\in\mathbb{R}$.

Мотивировка 2.19 (Свертка регулярных обобщенных функций)**.** *Пусть непрерывные функции F и G с финитными носителями являются ядрами регулярных обобщенных функций $f\in D'(\mathbb{R})$ и $g\in D'(\mathbb{R})$, соответственно. В этом случае корректно определена свертка $F*G$. Сверткой обобщенных функций f и g естественно считать регулярную обобщенную функцию из $D'(\mathbb{R})$ с ядром $F*G$. Легко видеть, что,*

$$\forall\ \varphi\in D(\mathbb{R}) \quad (f*g(x), \varphi(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}} F*G(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} F(y)G(x-y)\,dy\right)\varphi(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} F(y)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} G(x-y)\varphi(x)\,dx\right)dy = [x=z+y] = \int\limits_{\mathbb{R}} F(y)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} G(z)\varphi(z+y)\,dz\right)dy =$$
$$= [z=x] = \int\limits_{\mathbb{R}} F(y)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} G(x)\varphi(x+y)\,dx\right)dy = \Big(f(x), \Big(g(y), \varphi(x+y)\Big)\Big).$$

Определение 2.20 (Свертка обобщенных функций в D'). *Сверткой обобщенных функций $f \in D'(\mathbb{R})$ и $g \in D'(\mathbb{R})$ называют отображение вида*

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad (f * g(x), \varphi(x)) = \Big(f(x), \Big(g(y), \varphi(x+y)\Big)\Big), \tag{2.1}$$

при условии, что формула (2.1) корректно определяет обобщенную функцию из $D'(\mathbb{R})$.

Теорема 2.21 (Существование свертки обобщенных функций в D'). *Пусть $f \in D'(\mathbb{R})$, $g \in D'(\mathbb{R})$ и выполнено одно из следующих условий.*

(1) $\exists\ R > 0\ :\ \operatorname{supp} f \subset (-R, R)$;
(2) $\exists\ R > 0\ :\ \operatorname{supp} g \subset (-R, R)$;
(3) $\exists\ R \in \mathbb{R}\ :\ \operatorname{supp} f \subset (R, +\infty)$ *и* $\operatorname{supp} g \subset (R, +\infty)$;
(4) $\exists\ R \in \mathbb{R}\ :\ \operatorname{supp} f \subset (-\infty, R)$ *и* $\operatorname{supp} g \subset (-\infty, R)$.

Тогда корректно определена свертка $f * g \in D'(\mathbb{R})$.

Доказательство. (1) Пусть выполнено условие (1). Из теоремы 1.5 следует, что существует срезка χ такая, что

- $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$;
- $\forall\ x \in [-R, R]\ \chi(x) = 1$;
- $\forall\ x \notin [-(R+1), R+1]\ \chi(x) = 0$.

Из условия (1) следует, что $f = \chi f$. Таким образом, формулу (2.1) можно переписать в виде

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad (f * g(x), \varphi(x)) = \Big(f(x), \Big(g(y), \varphi(x+y)\Big)\Big) = \Big(\chi(x) f(x), \Big(g(y), \varphi(x+y)\Big)\Big) =$$
$$= \Big(f(x), \Big(g(y), \chi(x)\varphi(x+y)\Big)\Big) = \Big(f(x) \cdot g(y), \chi(x)\varphi(x+y)\Big).$$

Заметим теперь, что $\chi(x)\varphi(x+y)$ – бесконечно дифференцируемая функция с финитным носителем, т. е. $\chi(x)\varphi(x+y) \in D(\mathbb{R}^2)$ (отметим, что функция $\varphi(x+y)$, вообще говоря, имеет неограниченный носитель).

Далее, легко видеть, что из $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{D(\mathbb{R})} 0$ следует, что $\chi(x)\varphi_n(x+y) \xrightarrow[n\to\infty]{D(\mathbb{R}^2)} 0$. Отсюда и из корректности определения прямого произведения следует, что $f * g \in D'(\mathbb{R})$.

(2) Доказательство аналогично (1).

(3) Из теоремы 1.5 можно получить, что существует χ такая, что

- $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$;
- $\forall\ x \in [R, +\infty)\ \chi(x) = 1$;
- $\forall\ x \in (-\infty, R-1]\ \chi(x) = 0$.

Из условия (3) следует, что $f = \chi f$ и $g = \chi g$. Таким образом, формулу (2.1) можно переписать в виде

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad (f * g(x), \varphi(x)) = \Big(f(x), \Big(g(y), \varphi(x+y)\Big)\Big) = \Big(\chi(x) f(x), \Big(\chi(y) g(y), \varphi(x+y)\Big)\Big) =$$
$$= \Big(f(x), \Big(g(y), \chi(x)\chi(y)\varphi(x+y)\Big)\Big) = \Big(f(x) \cdot g(y), \chi(x)\chi(y)\varphi(x+y)\Big).$$

Заметим теперь, что $\chi(x)\chi(y)\varphi(x+y)$ – бесконечно дифференцируемая функция с финитным носителем, т. е. $\chi(x)\chi(y)\varphi(x+y) \in D(\mathbb{R}^2)$ (отметим, что функции $\varphi(x+y)$, $\chi(x)\varphi(x+y)$ и $\chi(y)\varphi(x+y)$, вообще говоря, имеют неограниченные носители).

Далее, легко видеть, что из $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{D(\mathbb{R})} 0$ следует, что $\chi(x)\chi(y)\varphi_n(x+y) \xrightarrow[n\to\infty]{D(\mathbb{R}^2)} 0$. Отсюда и из корректности определения прямого произведения следует, что $f * g \in D'(\mathbb{R})$.

(4) Доказательство аналогично (3). $\square$

Теорема 2.22 (Свойства свертки обобщенных функций)**.** *Пусть* $f \in D'(\mathbb{R})$, $g \in D'(\mathbb{R})$ *и выполнено одно из условий* (1) – (4) *теоремы* 2.21. *Тогда*

(1) $f * g = g * f$;
(2) $(f * g)' = f' * g = f * g'$.

Доказательство. Доказательство проведем для случая, когда выполнено условие (1) теоремы 2.21. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Пусть χ – срезка такая, что

- $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$;
- $\forall\ x \in [-R, R] \quad \chi(x) = 1$;
- $\forall\ x \notin [-(R+1), R+1] \quad \chi(x) = 0$.

(1) Используя результат теоремы 2.17, и те же приемы, что и при доказательстве теоремы 2.21 получим, что

$$\begin{aligned}\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad (f * g(x), \varphi(x)) &= \Big(f(x)\cdot g(y), \chi(x)\varphi(x+y)\Big) = \\ &= \Big(g(y)\cdot f(x), \chi(x)\varphi(x+y)\Big) = (g * f(x), \varphi(x)).\end{aligned}$$

(2) Аналогично, используя теорему 2.17, получим

$$\begin{aligned}&\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad ((f * g)'(x), \varphi(x)) = -(f * g(x), \varphi'(x)) = -\Big(f(x)\cdot g(y), \chi(x)\varphi'(x+y)\Big) \triangleq \\ &\triangleq -\Big(f(x)\cdot g(y), \partial_x(\chi(x)\varphi(x+y))\Big) + \Big(f(x)\cdot g(y), \chi'(x)\varphi(x+y)\Big) = \\ &= \Big(\partial_x(f(x)\cdot g(y)), \chi(x)\varphi(x+y)\Big) + \Big((\chi'(x)f(x))\cdot g(y), \varphi(x+y)\Big) = \\ &= \Big(f'(x)\cdot g(y), \chi(x)\varphi(x+y)\Big) = (f' * g(x), \varphi(x)), \\ &\triangleq -\Big(f(x)\cdot g(y), \partial_y(\chi(x)\varphi(x+y))\Big) = \Big(\partial_y(f(x)\cdot g(y)), \chi(x)\varphi(x+y)\Big) = \\ &= \Big(f(x)\cdot g'(y), \chi(x)\varphi(x+y)\Big) = (f * g'(x), \varphi(x)).\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\chi'(x)f(x) = 0$ (это следует из того, что носители $\chi(x)$ и $f(x)$ располагаются на не пересекающихся промежутках). $\square$

Пример 2.23. *Упростить выражение* $\delta(x-a) * f(x)$, *где* $a \in \mathbb{R}$ *и* $f \in D'(\mathbb{R})$.

Решение. Легко видеть, что

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R})\ (\delta(x-a) * f(x), \varphi) = \Big(\delta(x-a), (f(y), \varphi(x+y))\Big) = (f(y), \varphi(y+a)) = (f(x-a), \varphi(x)).$$

Ответ: $\delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$.

Пример 2.24. *Упростить выражение $\theta * \theta$.*

Решение. Легко видеть, что

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}) \qquad (\theta * \theta, \varphi) = \Big(\theta(x), (\theta(y), \varphi(x+y))\Big) = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty dy\ \varphi(x+y) = [y = z - x] =$$

$$= \int\limits_0^\infty dx \int\limits_x^\infty dz\ \varphi(z) = \int\limits_0^\infty dz \int\limits_0^z dy\ \varphi(z) = \int\limits_0^\infty z\varphi(z)\, dz = (z\theta(z), \varphi(z)).$$

Ответ: $\theta * \theta(x) = x\theta(x)$.

Теорема 2.25 (Свойства свертки обобщенной и гладкой функций)**.** *Пусть $f \in D'(\mathbb{R})$, $G \in D(\mathbb{R})$ и g – регулярная обобщенная функция с ядром G. Тогда*

(1) *$f * g(x)$ – регулярная обобщенная функция с ядром $\big(f(y), G(x-y)\big)$;*
(2) $\big(f(y), G(\cdot - y)\big) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть носитель G принадлежит отрезку $[-R, R]$ при некотором $R > 0$. Пусть φ – произвольная основная функция из класса $D(\mathbb{R})$ и носитель φ принадлежит отрезку $[-r, r]$ при некотором $r > 0$. Из теоремы 1.41 следует, что существуют регулярная обобщенная функция h с непрерывным ядром H и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $f|_K = h^{(n)}|_K$, где $K = [-R - r, R + r]$. Отсюда и из теоремы Фубини получим, что

$$(f * g, \varphi) = (h^{(n)} * g, \varphi) = (h * g^{(n)}, \varphi) = \Big(h(x), \big(g^{(n)}(y), \varphi(x+y)\big)\Big) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} H(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} G^{(n)}(y)\varphi(x+y)\, dy\right) dx = \int\limits_{\mathbb{R}} H(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} G^{(n)}(y-x)\varphi(y)\, dy\right) dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} H(x)G^{(n)}(y-x)\, dx\right) \varphi(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} H(y)G^{(n)}(x-y)\, dy\right) \varphi(x)\, dx.$$

Следовательно, $f * g$ – регулярная обобщенная функция с ядром

$$\int\limits_{\mathbb{R}} H(y)G^{(n)}(x-y)\, dy = \big(h(y), G^{(n)}(x-y)\big) = \big(h^{(n)}(y), G(x-y)\big) = \big(f(y), G(x-y)\big). \tag{2.2}$$

Гладкость ядра $\big(f(y), G(\cdot - y)\big)$ следует из формулы (2.2) и классических свойств свертки. □

3. Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений

3.1. Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений.

Теорема 3.1 (Общий вид решения линейного дифференциального уравнения в D'). *Пусть*

- $p_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ *при* $k = 1, 2, \dots, (n-1)$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $f \in D'$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) *Дифференциальное уравнение*

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = f \tag{3.1}$$

разрешимо в D'.

(2) *Общее решение уравнения* (3.1) *в* D' *имеет вид* $y = y_p + y_o$, *где*
   - y_p *– частное решение неоднородного уравнения* (3.1) *в* D',
   - y_o *– общее решение однородного уравнения*

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = 0 \tag{3.2}$$

в D'.

(3) *Любое решение однородного уравнения* (3.2) *в* D' *является регулярной обобщенной функцией, ядро которой удовлетворяет уравнению* (3.2) *в классическом смысле.*

(4) *Пространство решений однородного уравнения* (3.2) *в* D' *образует* n*-мерное линейное пространство.*

Доказательство. (1) Доказательство проведем для случая $n = 1$. Общее решение классического однородного уравнения

$$u' + p_0 u = 0$$

имеет вид

$$u(x) = C \exp\left(-\int\limits_0^x p_0(t)\, dt \right), \quad C \in \mathbb{C}.$$

Решение уравнения

$$y' + p_0 y = f, \quad y \in D' \tag{3.3}$$

будем искать в виде

$$y = uz, \tag{3.4}$$

где $z \in D'$. Подставляя представление (3.4) в уравнение (3.3), найдем, что

$$(uz)' + p_0 uz = f \iff u'z + uz' + p_0 uz = f \iff (u' + p_0 u)z + uz' = f \iff uz' = f.$$

Учитывая, что $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\frac{1}{u} \in C^\infty(\mathbb{R})$, получим

$$z' = \frac{1}{u} f. \tag{3.5}$$

Найдем решение уравнения (3.5). Пусть $\omega \in D$ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} \omega(x)\, dx = 1.$$

Легко видеть, что

$$\forall\ \varphi \in D \quad \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt - \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt \int\limits_{-\infty}^{x} \omega(t)\,dt \in D. \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что корректно определено отображение

$$\forall\ \varphi \in D \quad (z_p, \varphi) = -\left(\frac{1}{u}\,f, \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt - \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt \int\limits_{-\infty}^{x} \omega(t)\,dt \right).$$

Несложно показать, что $y_p \in D'$. Вычислим теперь y_p'

$$\forall\ \varphi \in D \quad (z_p', \varphi) = -(z_p, \varphi') = \left(\frac{1}{u}\,f, \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi'(t)\,dt - \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi'(t)\,dt \int\limits_{-\infty}^{x} \omega(t)\,dt \right) = \left(\frac{1}{u}\,f, \varphi \right).$$

Таким образом, z_p – обобщенное решение уравнения (3.5).

(2) Пусть y – решение уравнения (3.1). Выполняя подстановку

$$y = y_p + y_o,$$

где y_p – частное решение уравнения (3.1), в уравнении (3.1), получим

$$(y_p + y_o)^{(n)} + p_{n-1}(y_p + y_o)^{(n-1)} + \ldots + p_1(y_p + y_o)' + p_0(y_p + y_o) = f \quad \Longrightarrow$$

$$\underbrace{(y_p^{(n)} + p_{n-1}y_p^{(n-1)} + \ldots + p_1 y_p' + p_0 y_p)}_{=f} + (y_o^{(n)} + p_{n-1}y_o^{(n-1)} + \ldots + p_1 y_o' + p_0 y_o) = f \quad \Longrightarrow$$

$$y_o^{(n)} + p_{n-1}y_o^{(n-1)} + \ldots + p_1 y_o' + p_0 y_o = 0.$$

Что и требовалось доказать.

(3) Доказательство проведем для случая $n = 1$. Пусть y – обобщенное решение уравнения

$$y' + p_0 y = 0. \tag{3.7}$$

Рассмотрим классическое решение уравнения

$$u' + p_0 u = 0$$

вида

$$u(x) = \exp\left(-\int\limits_{0}^{x} p_0(t)\,dt \right), \quad C \in \mathbb{C}.$$

Из условий $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\frac{1}{u} \in C^\infty(\mathbb{R})$, следует, что корректно определена обобщенная функция вида

$$z = \frac{1}{u}\,y. \tag{3.8}$$

Легко видеть, что

$$z' = \frac{1}{u}\,y' - \frac{u'}{u^2}\,y = \frac{1}{u}\,y' + \frac{p_0 u}{u^2}\,y = \frac{1}{u}\,(y' + p_0 y) = 0.$$

Отсюда и из теоремы 1.38 следует, что найдется постоянная $C \in \mathbb{C}$ такая, что $z \equiv C$. Таким образом, из (3.8) вытекает, что $y = Cu$ – регулярная обобщенная функция с гладким ядром.

(4) Следует из пункта (3) настоящей теоремы и классической теории дифференциальных уравнений. □

Пример 3.2. *Найти общее решение уравнения* $y' = \mathcal{P}\frac{1}{x}$ *в* D'

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Найдем частное решение неоднородного уравнения

$$y' = \mathcal{P}\frac{1}{x}. \tag{3.9}$$

Из примера 1.32 следует, что $y_p = \ln|x|$ – частное решение уравнения (3.9) в D'.

Шаг 2. Найдем общее решение однородного уравнения

$$y' = 0. \tag{3.10}$$

Общее решение однородного уравнения (3.10) в D' имеет вид $y_o = C$, где $C \in \mathbb{C}$.

Шаг 3. Из теоремы 3.1 следует, что общее решение уравнения (3.9) в D' имеет вид $y = y_p + y_o$.

Ответ: $y = \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{C}$.

Теорема 3.3 (Связь между классическими и обобщенными решениями линейного дифференциального уравнения). *Пусть*

- $p_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ *при* $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- f *- регулярная обобщенная функция с непрерывным ядром* F.

Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) *Если* Y *– классическое решение уравнения*

$$Y^{(n)} + p_{n-1}Y^{(n-1)} + \ldots + p_1Y' + p_0Y = F, \tag{3.11}$$

то регулярная обобщенная функция y *с ядром* Y *удовлетворяет уравнению* (3.1).

(2) *Любое решение уравнения* (3.1) *в* D' *является регулярной обобщенной функцией, ядро которой удовлетворяет уравнению* (3.11) *в классическом смысле.*

Доказательство. (1) Из того, что Y – классическое решение уравнения (3.11) вытекает, что $Y \in C^n(\mathbb{R})$. Следовательно,

$$\forall\ \varphi \in D \qquad (y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_0y, \varphi) = \Big(y, (-1)^n\varphi^{(n)} + (-1)^{n-1}(p_{n-1}\varphi)^{(n-1)} + \ldots + p_0\varphi\Big) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} Y(x)\Big((-1)^n\varphi^{(n)}(x) + (-1)^{n-1}(p_{n-1}(x)\varphi(x))^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)\varphi(x)\Big)\, dx =$$

(интегрирование по частям возможно в силу условия $Y \in C^n(\mathbb{R})$)

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(Y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)Y(x)^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)Y(x)\Big)\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx = (f, \varphi).$$

(2) Из теоремы 3.1 следует, что общее решение уравнения (3.1) имеет вид $y = y_p + y_o$, причем y_o – регулярная обобщенная функция, ядро которой удовлетворяет уравнению (3.2) в классическом смысле.

В силу непрерывности F, из классического анализа следует, что существует классическое решение Y_p уравнения (3.11). Отсюда и из пункта (1) настоящей теоремы следует, что регулярная обобщенная функция y_p с ядром Y_p является обобщенным решением уравнения (3.1). Таким образом, общее решение уравнения (3.1) является регулярным функционалом, ядро которого удовлетворяет уравнению (3.1). $\square$

3.2. **Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.**

Определение 3.4 (Фундаментальное решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в $D'(\mathbb{R})$)**.** *Пусть*

- $a_k \in \mathbb{C}$ *при* $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $\forall\ y \in D'\ \mathcal{L}y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$.

Фундаментальным решением оператора $\mathcal{L}$ *называют всякую обобщенную функцию* $\mathcal{E}$, *удовлетворяющую уравнению* $\mathcal{L}\mathcal{E}(x) = \delta(x)$.

Теорема 3.5 (Фундаментальное решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в $D'(\mathbb{R})$)**.** *Пусть*

- $a_k \in \mathbb{C}$ *при* $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $\forall\ y \in D'\ \mathcal{L}y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$;
- *ядро* Z *регулярной обобщенной функции* z *является классическим решением задачи Коши*
$$\begin{cases} Z^{(n)} + a_{n-1}Z^{(n-1)} + \ldots + a_1 Z' + a_0 Z = 0, \\ Z^{(n-1)}(0) = 1,\ Z^{(n-2)}(0) = 0,\ Z^{(n-3)}(0) = 0,\ \ldots,\ Z(0) = 0. \end{cases}$$

Тогда $\mathcal{E}(x) = z(x)\theta(x)$ *– фундаментальное решение оператора* $\mathcal{L}$.

Доказательство. Из теоремы 1.36 следует, что
$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(x) &= z'(x)\theta(x) + Z(0)\delta(x) = z'(x)\theta(x), \\ \mathcal{E}''(x) &= z''(x)\theta(x) + Z'(0)\delta(x) = z''(x)\theta(x), \\ &\ldots, \\ \mathcal{E}^{(n-1)}(x) &= z^{(n-1)}(x)\theta(x) + Z^{(n-2)}(0)\delta(x) = z^{(n-1)}(x)\theta(x), \\ \mathcal{E}^{(n)}(x) &= z^{(n)}(x)\theta(x) + Z^{(n-1)}(0)\delta(x) = z^{(n)}(x)\theta(x) + \delta(x). \end{aligned}$$

Следовательно,
$$\mathcal{L}\mathcal{E}(x) = \mathcal{L}\big(z(x)\theta(x)\big) = \mathcal{L}\big(z(x)\big)\theta(x) + \delta(x) = \delta(x). \ \square$$

Пример 3.6. *Найти фундаментальное решение оператора*
$$\mathcal{L}y = y'' + 4y.$$

Решение. Легко видеть, что решение классической задачи Коши
$$Z'' + 4Z = 0, \quad Z(0) = 0,\ Z'(0) = 1$$
имеет вид $Z(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$. Отсюда и из теоремы 3.5 следует, что $\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)\theta(x)$ – фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$.

Ответ: $\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)\theta(x)$.

Теорема 3.7 (Частное решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в $D'(\mathbb{R})$)**.** *Пусть*

- $a_k \in \mathbb{C}$ *при* $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $\forall\ y \in D'\ \mathcal{L}y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$
- $\mathcal{E}$ *– фундаментальное решение оператора* $\mathcal{L}$;
- $f \in D'$;
- *корректно определена свертка* $\mathcal{E} * f$ *в* D'.

Тогда

(1) *обобщенная функция* $y = \mathcal{E} * f$ *является решением уравнения* $\mathcal{L}y = f$*;*
(2) *решение уравнения* $\mathcal{L}y = f$ *единственно в классе обобщенных функций, для которых корректно определена свертка* $\mathcal{E} * y$ *в* D'.

Доказательство. (1) Из теоремы 2.22 следует, что

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}(\mathcal{E} * f) = (\mathcal{L}\mathcal{E}) * f = \delta * f = f.$$

(2) Пусть $\mathcal{L}y_1 = f$, $\mathcal{L}y_2 = f$ и корректно определены свертки $\mathcal{E} * y_1$ и $\mathcal{E} * y_2$. Тогда

$$y_1 - y_2 = (y_1 - y_2) * \delta = (y_1 - y_2) * (\mathcal{L}\mathcal{E}) = (\mathcal{L}y_1 - \mathcal{L}y_2) * \mathcal{E} = (f - f) * \mathcal{E} = 0. \ \square$$

Пример 3.8. *Найти общее классическое решение уравнения*

$$y'' = e^x. \tag{3.12}$$

Решение. Легко видеть, что фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}y = y''$ имеет вид $\mathcal{E}(x) = x\theta(x)$. Далее, из теоремы 3.7 следует, что частное решение уравнения (3.12) имеет вид

$$y_p(x) = \mathcal{E} * f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} y\,\theta(y)e^{x-y}\,dy = \int\limits_0^\infty ye^{x-y}\,dy = e^x.$$

Отсюда, учитывая, что общее решение однородного уравнения $y'' = 0$ имеет вид

$$y_o(x) = ax + b,\ a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C},$$

найдем общее решение уравнения (3.12)

$$y(x) = y_p(x) + y_o(x) = e^x + ax + b,\ a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C}. \ \square$$

Пример 3.9. *Найти общее классическое решение уравнения*

$$y'' + y = f, \tag{3.13}$$

где $f \in L_1(\mathbb{R})$.

Решение. Легко видеть, что фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}y = y'' + y$ имеет вид

$$\mathcal{E}(x) = \sin x\,\theta(x).$$

Далее, из теоремы 3.7 следует, что частное решение уравнения (3.13) имеет вид

$$y_p(x) = \mathcal{E} * f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \sin y\,\theta(y)f(x-y)\,dy = \int\limits_0^\infty \sin y f(x-y)\,dy = [y = x - t] = \int\limits_{-\infty}^x \sin(x-t)f(t)\,dt.$$

Отсюда, учитывая, что общее решение однородного уравнения $y'' + y = 0$ имеет вид

$$y_o(x) = a\sin x + b\cos x,\ a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C},$$

найдем общее решение уравнения (3.13)

$$y(x) = y_p(x) + y_o(x) = \int\limits_{-\infty}^x \sin(x-t)f(t)\,dt + a\sin x + b\cos x,\ a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C}. \ \square$$

3.3. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с переменными коэффициентами.

Определение 3.10 (Фундаментальное решение дифференциального оператора с переменными коэффициентами в $D'(\mathbb{R})$)**.** *Пусть*

- $p_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ *при* $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $\forall\ y \in D'\ \mathcal{L}y = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y$.

Фундаментальным решением оператора $\mathcal{L}$ *называют всякую обобщенную функцию* $\mathcal{E}(x,t)$, *удовлетворяющую уравнению* $\mathcal{L}\mathcal{E}(x,t) = \delta(x-t)$ *для любого* $t \in \mathbb{R}$ *(предполагается, что оператор* $\mathcal{L}$ *действует по переменной* x*).*

Теорема 3.11 (Фундаментальное решение дифференциального оператора с переменными коэффициентами в $D'(\mathbb{R})$)**.** *Пусть*

- $p_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ *при* $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $\forall\ y \in D'\ \mathcal{L}y = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y$;
- *для любого* $t \in \mathbb{R}$ *ядро* $Z(x,t)$ *регулярной обобщенной функции* $z(x,t)$ *является классическим решением задачи Коши*

$$\begin{cases} Z^{(n)} + p_{n-1}Z^{(n-1)} + \ldots + p_1 Z' + p_0 Z = 0, \\ Z^{(n-1)}(t,t) = 1,\ Z^{(n-2)}(t,t) = 0,\ Z^{(n-3)}(t,t) = 0,\ \ldots,\ Z(t,t) = 0, \end{cases}$$

  где все производные берутся по переменной x.

Тогда $\mathcal{E}(x,t) = z(x,t)\theta(x-t)$ – *фундаментальное решение оператора* $\mathcal{L}$.

Доказательство. Доказывается так же как и теорема 3.5. □

Пример 3.12. *Найти фундаментальное решение оператора*

$$\mathcal{L}y = y' - 2xy.$$

Решение. Легко видеть, что решение классической задачи Коши

$$Z' - 2xZ = 0, \quad Z(t) = 1,\ t \in \mathbb{R},$$

имеет вид $Z(x) = e^{x^2 - t^2}$. Отсюда и из теоремы 3.11 следует, что $\mathcal{E}(x,t) = e^{x^2-t^2}\theta(x-t)$ – фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$.

Ответ: $\mathcal{E}(x,t) = e^{x^2-t^2}\theta(x-t)$.

Теорема 3.13 (Частное решение неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами в $D'(\mathbb{R})$)**.** *Пусть*

- $p_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ *при* $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $\forall\ y \in D'\ \mathcal{L}y = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y$;
- $\mathcal{E}$ – *фундаментальное решение оператора* $\mathcal{L}$;
- $f \in D'$;
- *корректно определена обобщенная функция*

$$\forall\ \varphi \in D \quad (y_p, \varphi) = \Big(f(t), \big(\mathcal{E}(x,t), \varphi(x)\big)\Big).$$

Тогда обобщенная функция y_p *является решением уравнения* $\mathcal{L}y = f$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\forall\ \varphi \in D \quad (\mathcal{L}y_p, \varphi) = (y_p, \mathcal{L}^*\varphi) = \Big(f(t), \big(\mathcal{E}(x,t), \mathcal{L}^*\varphi(x)\big)\Big) = \Big(f(t), \big(\mathcal{L}\mathcal{E}(x,t), \varphi(x)\big)\Big) =$$

$$= \Big(f(t), \big(\delta(x-t), \varphi(x)\big)\Big) = \big(f(t), \varphi(t)\big) = (f, \varphi),$$

где формально сопряженный оператор $\mathcal{L}^*$ определен равенством

$$\forall\ \varphi \in D\ \mathcal{L}^*\varphi = (-1)^n\varphi^{(n)} + (-1)^{n-1}\big(p_{n-1}\varphi\big)^{(n-1)} + \ldots + (-1)\big(p_1\varphi\big)' + p_0\varphi.$$

Следовательно, $\mathcal{L}y_p = f$. $\square$

Теорема 3.14 (Частное решение неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами и регулярной правой частью в $\mathbb{R}$)**.** *Пусть*

- $p_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ *при* $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$, *где* $n \in \mathbb{N}$*;*
- $\forall\ y \in D'\ \mathcal{L}y = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1y' + p_0y$*;*
- E *– ядро фундаментального решения* $\mathcal{E}$ *оператора* $\mathcal{L}$ *вида* $E(x,t) = Z(x,t)\theta(x-t)$*;*
- f *– регулярная обобщенная функция с непрерывным ядром* F*, имеющим финитный носитель.*

Тогда функция

$$Y_p(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} E(x,t)F(t)\,dt$$

является классическим решением уравнения $\mathcal{L}Y = F$*.*

Доказательство. Из теоремы 3.13 следует, что обобщенная функция

$$\forall\ \varphi \in D \quad (y_p, \varphi) = \Big(f(t), \big(\mathcal{E}(x,t), \varphi(x)\big)\Big)$$

является решением уравнения $\mathcal{L}y = f$. Из теоремы Фубини следует, что

$$\forall\ \varphi \in D \quad (y_p, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} F(t)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} E(x,t)\varphi(x)\,dx\right)dt = \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} F(t)E(x,t)\,dt\right)\varphi(x)\,dx.$$

Таким образом, y_p – регулярная обобщенная функция с ядром Y_p. Отсюда и из теоремы 3.3 следует, что Y_p – классическое решение уравнения $\mathcal{L}Y = F$. $\square$

Пример 3.15. *Найти частное классическое решение уравнения*

$$y' - 2xy = f, \tag{3.14}$$

где $f \in L_1(\mathbb{R})$*.*

Решение. Фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}y = y' - 2xy$ найдено в задаче 3.12

$$\mathcal{E}(x,t) = e^{x^2-t^2}\theta(x-t).$$

Далее, из теоремы 3.13 следует, что частное решение уравнения (3.14) может быть записано в виде

$$y_p(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{x^2-t^2}\theta(x-t)f(t)\,dt = e^{x^2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}f(t)\,dt. \ \square$$

3.4. **Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля.**

Определение 3.16 (Оператор Штурма-Лиувилля)**.** *Пусть*

- $-\infty < a < b < +\infty$;
- α_1, α_2, β_1 *и* β_2 *– вещественные параметры;*
- $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ *при* $k = 1, 2$;
- $p \in C^1[a, b]$ *и* $q \in C[a, b]$;
- $\forall\ x \in [a, b]\ p(x) \neq 0$.

Оператором Штурма-Лиувилля на отрезке $[a, b]$ *называется оператор*

$$\mathcal{L}u(x) = -\left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x)$$

с областью определения вида

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \left\{u \;\middle|\; u \in C^2[a, b],\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0,\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0\right\}.$$

Определение 3.17 (Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля)**.** *Пусть*

- $\mathcal{L}$ *– оператор Штурма-Лиувилля на отрезке* $[a, b]$;
- $g(\cdot, y)$ *– регулярная обобщенная функция, зависящая от параметра* $y \in [a, b]$;
- $\forall\ y \in (a, b)\ \forall\ x \in (a, b)\ \mathcal{L}_x g(x, y) = \delta(x - y)$;
- $G(x, y)$ *– ядро регулярной обобщенной функции* $g(x, y)$;
- $\forall\ y \in (a, b)\ G(\cdot, y) \in C^2[a, y) \cap C^2(y, b]$;
- $\forall\ y \in (a, b)\ \alpha_1 G(x, y) + \beta_1 G'_x(x, y)\big|_{x=a} = 0,\ \alpha_2 G(x, y) + \beta_2 G'_x(x, y)\big|_{x=b} = 0.$

Тогда g *называют функцией Грина оператора Штурма-Лиувилля* $\mathcal{L}$.

Теорема 3.18 (Достаточное условие существования функции Грина оператора Штурма-Лиувилля)**.** *Пусть*

- $\mathcal{L}$ *– оператор Штурма-Лиувилля на отрезке* $[a, b]$;
- $\lambda = 0$ *– не является собственным значением оператора Штурма-Лиувилля, т.е. задача*

$$\mathcal{L}u = 0, \quad u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$$

  имеет только тривиальное решение $u \equiv 0$;

Тогда

(1) *существует функция Грина* g *оператора Штурма-Лиувилля* $\mathcal{L}$;
(2) *ядро* G *функции Грина* g *имеет вид*

$$G(x, y) = \frac{1}{k}\begin{cases} u_1(x)u_2(y), & a \leqslant x \leqslant y \leqslant b, \\ u_1(y)u_2(x), & a \leqslant y \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Здесь

- u_1 *– произвольное нетривиальное решение задачи*

$$\mathcal{L}u_1 = 0, \quad \alpha_1 u_1(a) + \beta_1 u_1'(a) = 0;$$

- u_2 *– произвольное нетривиальное решение задачи*

$$\mathcal{L}u_2 = 0, \quad \alpha_2 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) = 0;$$

- $k = p(x)(u_1'(x)u_2(x) - u_2'(x)u_1(x))$, *причем* k *– нетривиальная постоянная.*

Доказательство. Утверждение о том, что k – постоянная оставим без доказательства (доказано на 2-ом курсе). Из того, что $\lambda = 0$ не является собственным числом оператора $\mathcal{L}$, следует, что u_1 и u_2 – линейно независимые решения уравнения $\mathcal{L}u = 0$. Отсюда следует нетривиальность постоянной k.

Далее, необходимо вычислить выражение $\mathcal{L}_x G(x,y)$ (и доказать, что оно равно $\delta(x-y)$). Из того, что $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – решения уравнения $\mathcal{L}_x u = 0$ следует, что $\mathcal{L}_x G(x,y) = 0$ при $x \neq y$ как в классическом, так и в обобщенном смысле. Таким образом, достаточно остановиться на вычислении выражения $\mathcal{L}_x G(x,y)$ в окрестности точки $x = y$.

Функция $G(x,y)$ непрерывна при $x = y$, следовательно

$$G'_x(x,y) = \frac{1}{k}\begin{cases} u_1'(x)u_2(y), & a \leqslant x \leqslant y \leqslant b, \\ u_2'(x)u_1(y), & a \leqslant y \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Функция $p(x)G'_x(x,y)$ имеет скачок при $x = y$, следовательно

$$\begin{aligned}(p(x)G'_x(x,y))'_x &= \frac{1}{k}\left\{\begin{array}{ll} (p(x)u_1'(x))'u_2(y), & a \leqslant x \leqslant y \leqslant b, \\ (p(x)u_2'(x))'u_1(y), & a \leqslant y \leqslant x \leqslant b \end{array}\right\} + \\ &+ \frac{p(x)u_2'(x)u_1(x) - p(x)u_1'(x)u_2(x)}{k}\,\delta(x-y) = \\ &= \frac{1}{k}\left\{\begin{array}{ll} (p(x)u_1'(x))'u_2(y), & a \leqslant x \leqslant y \leqslant b, \\ (p(x)u_2'(x))'u_1(y), & a \leqslant y \leqslant x \leqslant b \end{array}\right\} - \delta(x-y).\end{aligned}$$

Отсюда получим, что

$$\mathcal{L}_x G(x,y) = \frac{1}{k}\left\{\begin{array}{ll} (\mathcal{L}u_1(x))\,u_2(y), & a \leqslant x \leqslant y \leqslant b, \\ (\mathcal{L}u_2(x))\,u_1(y), & a \leqslant y \leqslant x \leqslant b \end{array}\right\} + \delta(x-y) = \delta(x-y). \ \square$$

Теорема 3.19 (Обратный оператор к оператору Штурма-Лиувилля)**.** *Пусть*

- $\mathcal{L}$ *– оператор Штурма-Лиувилля на отрезке* $[a,b]$*;*
- $\lambda = 0$ *– не является собственным значением оператора Штурма-Лиувилля.*

Тогда

(1) *существует обратный оператор* $\mathcal{L}^{-1} : C[a,b] \longrightarrow \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$*;*
(2) *обратный оператор* $\mathcal{L}^{-1}$ *может быть записан в виде*

$$\mathcal{L}^{-1}f(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)\,dy,$$

где G *– ядро функции Грина оператора Штурма-Лиувилля* $\mathcal{L}$*.*

Доказательство. (1) Для доказательство необходимо показать, что для любого $f \in C[a,b]$ существует единственное решение уравнения $\mathcal{L}u = f$ такое, что $u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$. Существование решения будет доказано в пункте (2).

Докажем, что решение уравнения $\mathcal{L}u = f$ единственно. Пусть

$$\mathcal{L}u_1 = f, \quad \mathcal{L}u_2 = f, \quad u_1 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}), \quad u_2 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}).$$

Отсюда получим, что

$$\mathcal{L}(u_1 - u_2) = 0, \quad (u_1 - u_2) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}).$$

Учитывая, что $\lambda = 0$ не является собственный значением оператора $\mathcal{L}$, получим, что $u_1 = u_2$.

(2) Для доказательства необходимо показать, что для любого $f \in C[a,b]$ функция

$$u(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)\,dy$$

принадлежит области определения оператора $\mathcal{L}$ и является решением уравнения

$$\mathcal{L}u(x) = f(x).$$

Ядро $G(x,y)$ имеет скачок производной при $x = y$, поэтому удобно переписать функцию u в виде

$$u(x) = \int_a^x G(x,y)f(y)\,dy + \int_x^b G(x,y)f(y)\,dy. \tag{3.15}$$

Отсюда легко следует, что $u \in C^2[a,b]$ (отметим, что $G(\cdot,y) \notin C^2[a,b]$ ни при каком $y \in [a,b]$). Учитывая, что $G(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям, из (3.15) легко следует, что u также удовлетворяет необходимым граничным условиям и, следовательно, $u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$.

Докажем теперь, что $\mathcal{L}u(x) = f(x)$ с помощью следующей *нестрогой* выкладки

$$\mathcal{L}u(x) = \mathcal{L}_x \int_a^b G(x,y)f(y)\,dy = \int_a^b \mathcal{L}_x G(x,y)f(y)\,dy = \int_a^b \delta(x-y)f(y)\,dy = f(x).$$

Данное *нестрогое* доказательство весьма наглядно, хотя и содержит грубую ошибку (интегрирование обобщенной δ-функции).

Более строгое доказательство практически полностью повторяет доказательство теорем 3.13 и 3.14. Приведем основные его моменты. Для начала, докажем, что обобщенная функция

$$(u,\varphi) = \Big(f(y), (g(x,y), \varphi(x))\Big),$$

определенная основных функциях φ с носителями сосредоточенными на интервале (a,b), является решением уравнения $\mathcal{L}u(x) = f(x)$ в обобщенном смысле. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u,\varphi) = (u,\mathcal{L}\varphi) = \Big(f(y), (g(x,y), \mathcal{L}\varphi(x))\Big) = \Big(f(y), (\mathcal{L}_x g(x,y), \varphi(x))\Big) = \\ = \Big(f(y), (\delta(x-y), \varphi(x))\Big) = \Big(f(y), \varphi(y)\Big) = (f,\varphi).\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\mathcal{L}$ – формально самосопряженный оператор ($\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$)[2]. Таким образом, $\mathcal{L}u = f$ в смысле обобщенных функций.

Наконец, так как u и f – регулярные обобщенные функции с непрерывными ядрами, то также как и при доказательстве теоремы 3.14 отсюда следует, что u и f – классические решения уравнения $\mathcal{L}u = f$. □

[2]Справедливости ради, отметим, что здесь также нужно предположить, что p и q – бесконечно дифференцируемые функции.

4. Обобщенные функции медленного роста

4.1. Пространство обобщенных функций медленного роста.

Определение 4.1 (Класс Шварца $S(\mathbb{R})$). *Классом Шварца $S(\mathbb{R})$ (сокращенно, S) называют пространство функций вида $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих следующим условиям*

- $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$;
- $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+ \ \forall\, p \in \mathbb{Z}_+ \ \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n \varphi^{(p)}(x) = 0$.

Определение 4.2 (Сходимость в смысле S). *Говорят, что последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ сходится при $n \to \infty$ к функции φ в смысле S, и пишут $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} \varphi$, если*

- $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \varphi_n \in S$;
- $\varphi \in S$;
- *для любых $k \in \mathbb{Z}_+$ и $p \in \mathbb{Z}_+$ последовательность функций $\left\{x^k \varphi_n^{(p)}(x)\right\}_{n=1}^\infty$ сходится при $n \to \infty$ к функции $x^k \varphi^{(p)}(x)$ равномерно на $\mathbb{R}$.*

Определение 4.3 (Пространство обобщенных функций медленного роста). *Пусть отображение*

$$f : S \ni \varphi \longmapsto (f, \varphi) \in \mathbb{C}$$

удовлетворяет условиям

- **линейность:** *для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in S$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ верно, что*
$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2);$$
- **непрерывность:** *для любой последовательности функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ такой, что $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} 0$ верно, что $\lim\limits_{n\to\infty} (f, \varphi_n) = 0$.*

Тогда отображение f называют обобщенной функцией медленного роста.

- ○ *Пространство обобщенных функций медленного роста обозначают $S'(\mathbb{R})$ или, сокращенно, S'.*

Теорема 4.4 (Связь между D и S и D' и S'). *Справедливы следующие вложения*

(1) $D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$;
(2) $S'(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$;

Доказательство. (1) Следует из определений 1.4 и 4.2.
(2) Следует из (1) и определений 1.6 и 4.3. □

Пример 4.5. *Справедливы следующие утверждения*

(1) $\delta(x) \in S'$;
(2) $P\frac{1}{x} \in S'$;
(3) $e^x \notin S'$, $e^x \in D'$.

Решение. Самостоятельно. □

Теорема 4.6 (Достаточное условие принадлежности регулярной обобщенной функции из D' классу S'). *Пусть*

(1) $f \in D'(\mathbb{R})$;
(2) f – *регулярная обобщенная функция с ядром F;*

(3) $\exists\ C > 0\ \exists\ n \geqslant 0\ :\ \forall\ x \in \mathbb{R} \quad |F(x)| \leqslant C(1+|x|)^n$.

Тогда $f \in S'(\mathbb{R})$.

Доказательство. Проверим, что отображение

$$S \ni \varphi \ \longmapsto\ (f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\varphi(x)\, dx \tag{4.1}$$

задано корректно. Пусть $\varphi \in S$. Из определения класса S следует, что $\varphi(x)$ убывает при $x \to \pm\infty$ быстрее любой степени x. Таким образом, найдется постоянная $M > 0$ такая, что

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \quad |\varphi(x)| \leqslant \frac{M}{(1+|x|)^{n+2}}.$$

Отсюда получим, что

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} F(x)\varphi(x)\, dx\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |F(x)||\varphi(x)|\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} C(1+|x|)^n \frac{M}{(1+|x|)^{n+2}}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{CM}{(1+|x|)^2}\, dx < \infty.$$

Следовательно, для любого $\varphi \in S$ корректно определено число (f, φ) (т.е. отображение (4.1) определено корректно).

Линейность отображения (4.1) следует из того, что $f \in D'$.

Докажем непрерывность отображения (4.1). Пусть задана последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{S} 0$. Из равномерной сходимости $\left\{x^{n+2}\varphi_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ на $\mathbb{R}$ при $k \to \infty$ следует, что

$$\varepsilon_k = \max_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^{n+2})|\varphi_k(x)| \longrightarrow 0$$

при $k \to \infty$. Таким образом,

$$|(f, \varphi_k)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |F(x)||\varphi_k(x)|\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|F(x)|}{(1+|x|)^n} \frac{(1+|x|)^n}{1+|x|^{n+2}} (1+|x|^{n+2})|\varphi_k(x)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_k C \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(1+|x|)^n}{1+|x|^{n+2}}\, dx \longrightarrow 0$$

при $k \to \infty$. $\square$

4.2. **Преобразование Фурье на классе Шварца.**

Определение 4.7 (Преобразование Фурье на S)**.** *Преобразованием Фурье функции* $\varphi \in S$ *называют функцию*

$$F[\varphi](k) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ikx}\, dx.$$

Замечание 4.8. *Иногда преобразование фурье* $F[\varphi](k)$ *мы будем обозначать через* $\hat{\varphi}(k)$.

Теорема 4.9 (Основные свойства преобразования Фурье на S)**.** *Пусть* $\varphi \in S$ *и* $\psi \in S$. *Тогда*

(1) $\forall\ p \in \mathbb{N} \quad F[x^p\varphi(x)](k) = (-i)^p \frac{d^p}{dk^p} F[\varphi(x)](k)$;

(2) $\forall\ p \in \mathbb{N} \quad F\left[\frac{d^p}{dx^p}\varphi(x)\right](k) = (-ik)^p F[\varphi(x)](k)$;

(3) $\forall\ a \in \mathbb{R} \quad F[\varphi(x-a)](k) = e^{ika} F\left[\varphi(x)\right](k)$;

(4) $\forall\ a \in \mathbb{R} \quad F[\varphi(x)e^{iax}](k) = F\left[\varphi(x)\right](k+a)$;

(5) $F[\varphi * \psi] = F[\varphi] \cdot F[\psi]$.

Доказательство. Самостоятельно (доказано на 2-ом курсе). □

Теорема 4.10 (Обратное преобразование Фурье на S)**.** *Справедливы следующие утверждения.*

(1) F *– биекция класса Шварца на себя.*

(2) *Обратное преобразование Фурье на S имеет вид*

$$\forall\ \hat{\varphi} \in S \quad F^{-1}[\hat{\varphi}(k)](x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(k) e^{-ikx}\, dk.$$

Доказательство. Без доказательства (доказано на 2-ом курсе). □

4.3. **Преобразование Фурье на обобщенных функциях медленного роста.**

Мотивировка 4.11 (Преобразование Фурье регулярной обобщенной функции)**.** *Пусть G – ядро регулярной обобщенной функций g из S' и G быстро убывает на бесконечности. Ясно, что преобразованием Фурье обобщенной функции g естественно считать регулярную обобщенную функцию $F[g]$ с ядром $F[G]$. Следовательно,*

$$\forall\ \varphi \in S \quad (F[g], \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} F[G(x)](k)\varphi(k)\, dk = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} G(x) e^{ikx}\, dx \right) \varphi(k)\, dk =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} G(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(k) e^{ikx}\, dk \right) dx = \int\limits_{\mathbb{R}} G(x) F[\varphi(k)](x)\, dx = (g, F[\varphi]).$$

Определение 4.12 (Преобразование Фурье на S')**.** *Преобразованием Фурье обобщенной функции $g \in S'$ называют обобщенную функцию, действующую по правилу*

$$\forall\ \varphi \in S \quad (F[g], \varphi) = (g, F[\varphi]).$$

Теорема 4.13 (Корректность определения преобразования Фурье на S')**.** *Пусть $g \in S'$. Тогда $F[g] \in S'$.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 4.14 (Основные свойства преобразования Фурье на S')**.** *Пусть $g \in S'$. Тогда*

(1) $\forall\ p \in \mathbb{N} \quad F[x^p g(x)](k) = (-i)^p \frac{d^p}{dk^p} F[g(x)](k);$

(2) $\forall\ p \in \mathbb{N} \quad F\left[\frac{d^p}{dx^p} g(x)\right](k) = (-ik)^p F[g(x)](k);$

(3) $\forall\ a \in \mathbb{R} \quad F[g(x-a)](k) = e^{ika} F\left[g(x)\right](k);$

(4) $\forall\ a \in \mathbb{R} \quad F[g(x)e^{iax}](k) = F\left[g(x)\right](k+a).$

Доказательство. (1) Пусть $p \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall\ \varphi \in S$ верно, что

$$\Big(F[x^p g(x)](k), \varphi(k)\Big) = \Big(x^p g(x), F[\varphi(k)](x)\Big) = \Big(i^p g(x), (-ix)^p F[\varphi(k)](x)\Big) =$$

$$= \left(i^p g(x), F\left[\frac{d^p}{dk^p}\varphi(k)\right](x)\right) = \left(i^p F\left[g(x)\right](k), \frac{d^p}{dk^p}\varphi(k)\right) = \left((-i)^p \frac{d^p}{dk^p} F\left[g(x)\right](k), \varphi(k)\right).$$

(2) Пусть $p \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall\ \varphi \in S$ верно, что

$$\left(F\left[\frac{d^p}{dx^p}g(x)\right](k), \varphi(k)\right) = \left(\frac{d^p}{dx^p}g(x), F[\varphi(k)](x)\right) = \left(g(x), (-1)^p\frac{d^p}{dx^p}F[\varphi(k)](x)\right) =$$
$$= \Big(g(x), (-i)^p F[k^p\varphi(k)](x)\Big) = \Big((-i)^p F[g(x)](k), k^p\varphi(k)\Big) = \Big((-ik)^p F[g(x)](k), \varphi(k)\Big).$$

(3) Пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall\ \varphi \in S$ верно, что

$$\Big(F[g(x-a)](k), \varphi(k)\Big) = \Big(g(x-a), F[\varphi(k)](x)\Big) = \Big(g(x), F[\varphi(k)](x+a)\Big) =$$
$$= \Big(g(x), F[\varphi(k)e^{iak}](x)\Big) = \Big(F[g(x)](k), \varphi(k)e^{iak}\Big) = \Big(e^{iak}F[g(x)](k), \varphi(k)\Big).$$

(4) Пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall\ \varphi \in S$ верно, что

$$\Big(F[g(x)e^{iax}](k), \varphi(k)\Big) = \Big(g(x)e^{iax}, F[\varphi(k)](x)\Big) = \Big(g(x), e^{iax}F[\varphi(k)](x)\Big) =$$
$$= \Big(g(x), F[\varphi(k-a)](x)\Big) = \Big(F[g(x)](k), \varphi(k-a)\Big) = \Big(F[g(x)](k+a), \varphi(k)\Big). \ \Box$$

Теорема 4.15 (Обратное преобразование Фурье на S')**.** *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *F – биекция S' на себя.*

(2) *Обратное преобразование Фурье на S' имеет вид*

$$\forall\ g \in S'\ \forall\ \varphi \in S \quad \Big(F^{-1}[g(x)](k), \varphi(k)\Big) = \Big(g(x), F^{-1}[\varphi(k)](x)\Big).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить, что $F \circ F^{-1} = I$ и $F^{-1} \circ F = I$, где I – тождественное отображение в S'.

Из теоремы 4.10 следует, что $\forall\ g \in S'\ \forall\ \varphi \in S$

$$\Big(F \circ F^{-1}[g](x), \varphi(x)\Big) = \Big(F^{-1}[g](k), F[\varphi](k)\Big) = \Big(g(x), F^{-1} \circ F[\varphi](x)\Big) = \Big(g(x), \varphi(x)\Big),$$
$$\Big(F^{-1} \circ F[g](x), \varphi(x)\Big) = \Big(F[g](k), F^{-1}[\varphi](k)\Big) = \Big(g(x), F \circ F^{-1}[\varphi](x)\Big) = \Big(g(x), \varphi(x)\Big). \ \Box$$

Теорема 4.16 (Непрерывность прямого и обратного преобразований Фурье в S')**.**

Пусть $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{S'} f$. *Тогда*

(1) $F[f_n] \xrightarrow[n\to+\infty]{S'} F[f]$;

(2) $F^{-1}[f_n] \xrightarrow[n\to+\infty]{S'} F^{-1}[f]$.

Доказательство. (1) Необходимо доказать, что для любой $\varphi \in S$ верно, что

$$\lim_{n\to+\infty}(F[f_n], \varphi) = (F[f], \varphi).$$

Пусть φ – произвольная функция из S. Тогда $F[\varphi] \in S$ и из условия

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{S'} f$$

следует, что

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n, F[\varphi]) = (f, F[\varphi]).$$

Отсюда получим, что

$$\lim_{n\to+\infty}(F[f_n], \varphi) = \lim_{n\to+\infty}(f_n, F[\varphi]) = (f, F[\varphi]) = (F[f], \varphi).$$

(2) Доказывается аналогично пункту (1). $\square$

Определение 4.17 (Свертка обобщенных функций в S'). *Сверткой обобщенных функций $h \in S'(\mathbb{R})$ и $g \in S'(\mathbb{R})$ называют отображение вида*

$$\forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}) \quad (h * g(x), \varphi(x)) = \Big(h(x), \Big(g(y), \varphi(x+y)\Big)\Big), \tag{4.2}$$

при условии, что формула (4.2) *корректно определяет обобщенную функцию из $S'(\mathbb{R})$.*

Теорема 4.18 (Существование свертки обобщенных функций в S'). *Пусть $h \in S'(\mathbb{R})$, $g \in S'(\mathbb{R})$ и выполнено одно из следующих условий.*

(1) $\exists\ R > 0\ :\ \operatorname{supp} h \subset (-R, R)$;
(2) $\exists\ R > 0\ :\ \operatorname{supp} g \subset (-R, R)$;
(3) $\exists\ R \in \mathbb{R}\ :\ \operatorname{supp} h \subset (R, +\infty)$ *и* $\operatorname{supp} g \subset (R, +\infty)$;
(4) $\exists\ R \in \mathbb{R}\ :\ \operatorname{supp} h \subset (-\infty, R)$ *и* $\operatorname{supp} g \subset (-\infty, R)$.

Тогда корректно определена свертка $h * g \in S'(\mathbb{R})$.

Доказательство. Без доказательства (аналогично доказательству теоремы 2.21). $\square$

Теорема 4.19 (Преобразование Фурье постоянной функции). *Справедлива следующая формула*

$$F[1](k) = 2\pi\delta(k)$$

Доказательство. Из теоремы 4.15 следует, что для доказательства настоящей теоремы достаточно доказать, что

$$F^{-1}[\delta(k)] = \frac{1}{2\pi}.$$

Легко видеть, что $\forall\ \varphi \in S$

$$\Big(F^{-1}[\delta(k)](x), \varphi(x)\Big) = \Big(\delta(k), F^{-1}[\varphi(x)](k)\Big) = F^{-1}[\varphi(x)](0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \left(\frac{1}{2\pi}, \varphi(x)\right). \ \square$$

Определение 4.20 (Обобщенная функция $\frac{1}{x+i0}$).

$$\forall\ \varphi \in S \quad \left(\frac{1}{x+i0}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx.$$

Определение 4.21 (Обобщенная функция $\frac{1}{x-i0}$).

$$\forall\ \varphi \in S \quad \left(\frac{1}{x-i0}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx.$$

Теорема 4.22 (Преобразование Фурье $\theta(x)$). *Справедлива следующая формула*

$$F[\theta(x)](k) = \frac{i}{k+i0}.$$

Доказательство. Легко видеть, что $\forall\ \varphi \in S$

$$\Big(F[\theta(x)](k), \varphi(k)\Big) = \Big(\theta(x), F[\varphi](x)\Big) = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ikx}\varphi(k)\,dk\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ikx-\varepsilon x}\varphi(k)\,dk\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{(ik-\varepsilon)x}\,dx\right)\varphi(k)\,dk = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{-1}{ik-\varepsilon}\,\varphi(k)\,dk = \left(\frac{i}{k+i0}, \varphi(k)\right). \ \square$$

Теорема 4.23 (Преобразование Фурье $\frac{1}{x\pm i0}$)**.** *Справедливы следующие формулы*

$$F\left[\frac{1}{x+i0}\right](k) = -2\pi i\theta(-k), \quad F\left[\frac{1}{x-i0}\right](k) = 2\pi i\theta(k).$$

Доказательство. Из теоремы 4.22 следует, что

$$F\left[\frac{1}{x+i0}\right](k) = 2\pi F^{-1}\left[\frac{1}{x+i0}\right](-k) = 2\pi(-i)\theta(-k) = -2\pi i\theta(-k).$$

Второе утверждение доказывается аналогично. $\square$

Теорема 4.24 (Формулы Сохоцкого)**.** *Справедливы следующие формулы*

$$\frac{1}{x+i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - \pi i\delta(x), \quad \frac{1}{x-i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} + \pi i\delta(x).$$

Доказательство. Докажем первую из двух формул (вторая доказывается аналогично). Легко видеть, что $\forall\ \varphi \in S$

$$\left(\frac{1}{x+i0}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)-\frac{i\varphi(0)}{x+i}}{x+i\varepsilon}\,dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{i\varphi(0)}{(x+i)(x+i\varepsilon)}\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)-\frac{i\varphi(0)}{x+i}}{x}\,dx = v.p.\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)-\frac{i\varphi(0)}{x+i}}{x}\,dx = v.p.\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx - v.p.\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{i\varphi(0)}{(x+i)x}\,dx =$$

$$= \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) - \pi i\operatorname*{res}_{z=0}\frac{i\varphi(0)}{(z+i)z} = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) - \pi i\varphi(0) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) - \pi i(\delta(x), \varphi(x)). \ \square$$

Теорема 4.25 (Преобразование Фурье $\mathcal{P}\frac{1}{x}$)**.** *Справедлива следующая формула*

$$F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right](k) = \pi i\,\mathrm{sign}(k).$$

Доказательство. Из теорем 4.23 и 4.24 следует, что

$$F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right](k) = F\left[\frac{1}{x+i0}\right](k) + \pi i F[\delta(x)](k) = -2\pi i\theta(-k) + \pi i = \pi i\,\mathrm{sign}(k). \ \square$$

4.4. **Метод Фурье решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R})$.**

Теорема 4.26 (Метод Фурье построения фундаментального решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R})$)**.** *Пусть*

- $a_k \in \mathbb{C}$ *при* $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $\forall\ y \in S'\ \mathcal{L}y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$;
- $\hat{y}$ *– решение уравнения*

$$\Big((-ik)^n + a_{n-1}(-ik)^{n-1} + \ldots + a_1(-ik) + a_0\Big)\hat{y}(k) = 1 \tag{4.3}$$

в S'.

Тогда $\mathcal{E}(x) = F^{-1}[\hat{y}](x)$ *– фундаментальное решение оператора* $\mathcal{L}$.

Доказательство. Применяя обратное преобразование Фурье к равенству (4.3), получим

$$F^{-1}\left[\Big((-ik)^n + a_{n-1}(-ik)^{n-1} + \ldots + a_1(-ik) + a_0\Big)\hat{y}(k)\right](x) = \delta(x)$$

$$\Big(\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{d}{dx} + a_0\Big)F^{-1}\left[\hat{y}\right](x) = \delta(x)$$

$$\Big(\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{d}{dx} + a_0\Big)\mathcal{E}(x) = \delta(x)$$

$$\mathcal{E}^{(n)}(x) + a_{n-1}\mathcal{E}^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1\mathcal{E}'(x) + a_0 y = \delta(x). \ \square$$

5. Применение обобщенных функций к решению дифференциальных уравнений в частных производных

5.1. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов в частных производных во всем пространстве.

Определение 5.1 (Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора в $D'(\mathbb{R}^n)$). *Пусть*

- $\mathcal{L}$ – *линейный дифференциальный оператор в* $D'(\mathbb{R}^n)$, *где* $n \geqslant 1$;
- $\forall\ y \in \mathbb{R}^n \quad \mathcal{E}(\cdot, y) \in D'(\mathbb{R}^n)$;
- $\forall\ y \in \mathbb{R}^n \quad \mathcal{L}\mathcal{E}(x, y) = \delta(x - y)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Тогда $\mathcal{E}$ *называют фундаментальным решением оператора* $\mathcal{L}$.

Замечание 5.2. *Фундаментальное решение определяется не единственным образом.*

Теорема 5.3 (Фундаментальное решение дифференциального оператора в частных производных с постоянными коэффициентами в $D'(\mathbb{R}^n)$). *Пусть*

- $\mathcal{L}$ – *линейный дифференциальный оператор в* $D'(\mathbb{R}^n)$ *с постоянными коэффициентами, где* $n \geqslant 1$;
- $\mathcal{E}$ – *фундаментальное решение оператора* $\mathcal{L}$.

Тогда $\mathcal{E}(x - y, 0)$ – *фундаментальное решение.*

Доказательство. Из определения 5.1 следует, что $\mathcal{E}(t, 0)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}\mathcal{E}(t, 0) = \delta(t).$$

Заметим теперь, что для любого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ верно, что

$$\left.\frac{\partial \mathcal{E}(t, 0)}{\partial t_k}\right|_{t=x-y} = \frac{\partial \mathcal{E}(x - y, 0)}{\partial x_k},$$

где $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Отсюда, учитывая, что $\mathcal{L}$ – дифференциальный оператор с *постоянными* коэффициентами, получим, что

$$\mathcal{L}\mathcal{E}(x - y, 0) = \mathcal{L}\mathcal{E}(t, 0)\big|_{t=x-y} = \delta(t)\big|_{t=x-y} = \delta(x - y). \ \square$$

Пример 5.4. *Рассмотрим одномерный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами вида* $\mathcal{L}u = u'$. *Легко видеть, что*

$$\mathcal{E}(x, y) = \theta(x - y)$$

является фундаментальным решением оператора $\mathcal{L}$. *Вместе с этим, обобщенная функция*

$$\mathcal{E}(x - y, 0) = \theta(x - y)$$

также является фундаментальным решением оператора $\mathcal{L}$.

Пример 5.5. *Рассмотрим одномерный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами вида* $\mathcal{L}u = e^x u'$. *Легко видеть, что*

$$\mathcal{E}(x, y) = e^{-y}\theta(x - y)$$

является фундаментальным решением оператора $\mathcal{L}$. *Вместе с этим, обобщенная функция*

$$\mathcal{E}(x - y, 0) = \theta(x - y)$$

уже не является фундаментальным решением оператора $\mathcal{L}$.

Определение 5.6 (Формально сопряженный оператор в $D'(\mathbb{R}^n)$)**.** *Пусть $\mathcal{L}$ – линейный дифференциальный оператор в $D'(\mathbb{R}^n)$, где $n \geqslant 1$. Тогда $\mathcal{L}^*$ называют формально сопряженным оператором к $\mathcal{L}$, если*

$$\forall\ u \in D'(\mathbb{R}^n)\ \forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (\mathcal{L}u, \varphi) = (u, \mathcal{L}^*\varphi).$$

Теорема 5.7 (Частное решение неоднородного дифференциального уравнения в частных производных в $D'(\mathbb{R}^n)$)**.** *Пусть*

- *$\mathcal{L}$ – линейный дифференциальный оператор в $D'(\mathbb{R}^n)$, где $n \geqslant 1$;*
- *$\mathcal{E}$ – фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$;*
- *$f \in D'$;*
- *корректно определена обобщенная функция*

$$\forall\ \varphi \in D \quad (u_p, \varphi) = \Big(f(y), \big(\mathcal{E}(x,y), \varphi(x)\big)\Big).$$

Тогда обобщенная функция u_p является решением уравнения $\mathcal{L}u = f$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\forall\ \varphi \in D \quad (\mathcal{L}u_p, \varphi) = (u_p, \mathcal{L}^*\varphi) = \Big(f(y), \big(\mathcal{E}(x,y), \mathcal{L}^*\varphi(x)\big)\Big) = \Big(f(y), \big(\mathcal{L}\mathcal{E}(x,y), \varphi(x)\big)\Big) =$$
$$= \Big(f(y), \big(\delta(x-y), \varphi(x)\big)\Big) = \big(f(y), \varphi(y)\big) = (f, \varphi).$$

Следовательно, $\mathcal{L}u_p = f$. $\square$

Теорема 5.8 (Частное решение неоднородного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами в $D'(\mathbb{R}^n)$)**.** *Пусть*

- *$\mathcal{L}$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами в $D'(\mathbb{R}^n)$, где $n \geqslant 1$;*
- *$\mathcal{E}$ – фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$;*
- *$\mathcal{E}_0(x) = \mathcal{E}(x, 0)$;*
- *$f \in D'(\mathbb{R}^n)$;*
- *корректно определена обобщенная функция*

$$u_p = f * \mathcal{E}_0.$$

Тогда

(1) *обобщенная функция u_p является решением уравнения $\mathcal{L}u = f$;*
(2) *решение уравнения $\mathcal{L}u = f$ единственно в классе обобщенных функций из $D'(\mathbb{R}^n)$, для которых корректно определена свертка с $\mathcal{E}_0$.*

Доказательство. (1) (Первый способ доказательства) Из теоремы 5.3 следует, что

$$\forall\ \varphi \in D \quad (u_p, \varphi) = (f * \mathcal{E}_0, \varphi) = \Big(f(y), \big(\mathcal{E}_0(x), \varphi(x+y)\big)\Big) = \Big(f(y), \big(\mathcal{E}_0(x-y), \varphi(x)\big)\Big).$$

Отсюда и из теоремы 5.7 следует, что u_p является решением уравнения $\mathcal{L}u = f$.

(1) (Второй способ доказательства) Из свойств свертки обобщенных функций следует, что

$$\mathcal{L}u_p = \mathcal{L}(f * \mathcal{E}_0) = f * (\mathcal{L}\mathcal{E}_0) = f * \delta = f.$$

(2) Пусть u – решение уравнения $\mathcal{L}u = 0$ такое, что $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ и корректно определена свертка $u * \mathcal{E}_0$. Тогда

$$u = u * \delta = u * (\mathcal{L}\mathcal{E}_0) = \mathcal{L}(u * \mathcal{E}_0) = (\mathcal{L}u) * \mathcal{E}_0 = 0. \ \square$$

Теорема 5.9 (Частное решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и регулярной правой частью в $\mathbb{R}^n$)**.** *Пусть*

- $\mathcal{L}$ – *линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами в* $D'(\mathbb{R}^n)$, *где* $n \geqslant 1$;
- $\mathcal{E}$ – *фундаментальное решение оператора* $\mathcal{L}$;
- $\mathcal{E}_0(x) = \mathcal{E}(x, 0)$;
- f – *регулярная обобщенная функция с ядром* F;
- $F \in D(\mathbb{R}^n)$.

Тогда функция

$$U_p(x) = \big(\mathcal{E}_0(y), F(x-y)\big)$$

является классическим решением уравнения $\mathcal{L}U = F$.

Доказательство. Из теоремы 2.25 (точнее из ее аналога для $\mathbb{R}^n$) следует, что $U_p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Из непрерывности функционала $\mathcal{E}_0$ (см. определение 1.6 (пространство обобщенных функций)) следует, что

$$\mathcal{L}U_p(x) = \mathcal{L}\big(\mathcal{E}_0(y), F(x-y)\big) = \big(\mathcal{E}_0(y), \mathcal{L}_x F(x-y)\big) = \big(\mathcal{E}_0(y), \mathcal{L}_y^* F(x-y)\big) = \\ = \big(\mathcal{L}_y \mathcal{E}_0(y), F(x-y)\big) = \big(\delta(y), F(x-y)\big) = F(x). \ \square$$

5.2. **Фундаментальное решение оператора Лапласа.**

Определение 5.10 (Фундаментальное решение оператора Лапласа)**.** *Пусть*

- $\mathcal{E} \in D'(\mathbb{R}^n)$, *где* $n \geqslant 2$;
- $\Delta\mathcal{E}(x) = \delta(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Тогда $\mathcal{E}$ *называют фундаментальным решением оператора Лапласа в* $\mathbb{R}^n$.

Фундаментальное решение $\mathcal{E}$ оператора Лапласа вне окрестности начала координат удовлетворяет однородному уравнению

$$\Delta\mathcal{E}(x) = 0. \tag{5.1}$$

Найдем центрально симметричные решения уравнения (5.1). Другими словами, будем искать решение уравнения (5.1) вида

$$\mathcal{E}(x) = f(r), \quad r = |x|.$$

Легко видеть, что при $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняются равенства

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_1}{r},$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x_k} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x_k} = f'(r)\frac{x_k}{r},$$

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(f'(r)\frac{x_k}{r}\right) = f''(r)\frac{x_k^2}{r^2} + f'(r)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_k}{r}\right) = f''(r)\frac{x_k^2}{r^2} + f'(r)\frac{1}{r} - f'(r)\frac{x_k^2}{r^3}.$$

Следовательно,

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{n-1}{r}f'(r) = 0.$$

Решая последнее уравнение, получим, что при $n = 2$

$$f(r) = A + B\ln r$$

и при $n > 2$

$$f(r) = A + \frac{B}{r^{n-2}},$$

где A и B – произвольные постоянные.

Теорема 5.11 (Фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^2$)**.** *$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2\pi}\ln r$ – фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{E}(x)$ – регулярная обобщенная функция. Пусть теперь $\varphi \in D'(\mathbb{R})$, B_R – круг с центром вначале координат достаточно большого радиуса R, такого, что $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R$, B_ε – круг с центром вначале координат малого радиуса $\varepsilon > 0$ (в дальнейшем мы перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$), S_ε – окружность с центром вначале координат радиуса ε и n – внутренняя нормаль к границе круга B_ε. Тогда

$$(\Delta\mathcal{E}(x), \varphi(x)) = (\mathcal{E}(x), \Delta\varphi(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(x)\Delta\varphi(x)\,dx_1\,dx_2 = \int\limits_{B_R} \mathcal{E}(x)\Delta\varphi(x)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \mathcal{E}(x)\Delta\varphi(x)\,dx_1\,dx_2.$$

Далее, используя вторую формулу Грина

$$\int\limits_D \Big(u\Delta v - v\Delta u\Big)\,dx_1\,dx_2 = \int\limits_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,dl$$

для $u = \mathcal{E}$, $v = \varphi$, $D = B_R \setminus B_\varepsilon$ (∂D – граница кольца D) и, учитывая, что φ обращается в ноль на границе круга B_R получим, что

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \mathcal{E}(x)\Delta\varphi(x)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \varphi(x)\Delta\mathcal{E}(x)\,dx_1\,dx_2 + \int\limits_{S_\varepsilon}\left(\mathcal{E}(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} - \varphi(x)\frac{\partial\mathcal{E}(x)}{\partial n}\right)\,dl\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{S_\varepsilon} \mathcal{E}(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\,dl - \int\limits_{S_\varepsilon}\varphi(x)\frac{\partial\mathcal{E}(x)}{\partial n}\,dl\right) = \left[\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} O(\varepsilon\ln\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_\varepsilon}\Big(\varphi(0) + O(\varepsilon)\Big)\frac{\partial\ln r}{\partial r}\,dl = \left[\frac{\partial\ln r}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon},\ \int\limits_{S_\varepsilon} dl = O(\varepsilon)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varphi(0)}{2\pi}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{1}{r}\,dl + \lim_{\varepsilon\to+0} O(\varepsilon) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).\ \square$$

Теорема 5.12 (Фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$)**.** *$\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{4\pi r}$ – фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы можно провести аналогично доказательству теоремы 5.11. Мы же проведем доказательство этой теоремы другим способом, который не предполагает знание формулы для фундаментального решения до начала доказательства.

Будем искать фундаментальное решение из класса $S'(\mathbb{R}^3)$ (напомним, что $S'(\mathbb{R}^3) \subset D'(\mathbb{R}^3)$). Это означает, что к равенству

$$\Delta\mathcal{E}(x) = \delta(x)$$

можно применить преобразование Фурье. Следовательно,

$$-|k|^2 F[\mathcal{E}](k) = 1, \tag{5.2}$$

где $k = (k_1, k_2, k_3)$ и $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. Уравнение (5.2) имеет не единственное решение (это соответствует тому, что фундаментальное решение определено не единственным образом). В качестве частного решения уравнения (5.2) удобно выбрать следующее

$$F[\mathcal{E}](k) = -\frac{1}{|k|^2}.$$

Здесь мы учли, что $\frac{1}{|k|^2}$ имеет интегрируемую особенность в нуле и, следовательно, $\frac{1}{|k|^2}$ – регулярная обобщенная функция.

Далее, заметим, что функция $\frac{1}{|k|^2}$ не является абсолютно интегрируемой в окрестности бесконечности. Поэтому обратное преобразование Фурье нельзя понимать в обычном смысле. Для того чтобы обойти эту трудность воспользуемся следующим приемом. Легко видеть, что

$$\frac{\theta(R-|k|)}{|k|^2} \underset{R\to+\infty}{\overset{S'(\mathbb{R}^3)}{\longrightarrow}} \frac{1}{|k|^2}.$$

Отсюда и из теоремы 4.16 (непрерывность прямого и обратного преобразований Фурье в S') следует, что

$$F^{-1}\left[\frac{\theta(R-|k|)}{|k|^2}\right] \underset{R\to+\infty}{\overset{S'(\mathbb{R}^3)}{\longrightarrow}} F^{-1}\left[\frac{1}{|k|^2}\right].$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}(x) = -F^{-1}\left[\frac{1}{|k|^2}\right](x) = -\lim_{R\to+\infty} F^{-1}\left[\frac{\theta(R-|k|)}{|k|^2}\right](x) = -\frac{1}{8\pi^3}\lim_{R\to+\infty}\iiint\limits_{|k|<R} \frac{e^{-i(k,x)}}{|k|^2}\,dk_1\,dk_2\,dk_3,$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $k = (k_1, k_2, k_3)$ и $(x, k) = x_1k_1 + x_2k_2 + x_3k_3$. Введем сферические координаты так, чтобы угол θ измерялся от направления, совпадающего с направлением вектора x. Тогда получим, что

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{8\pi^3}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-i|k||x|\cos\theta}}{|k|^2}|k|^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,d|k| =$$

$$= -\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^R\int\limits_0^\pi e^{-i|k||x|\cos\theta}\sin\theta\,d\theta\,d|k| =$$

$$= -\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^R\left(\frac{1}{i|k||x|}e^{-i|k||x|\cos\theta}\Big|_0^\pi\right)d|k| = -\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^R\frac{2\sin(|k||x|)}{|k||x|}\,d|k| =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2|x|}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\sin|k|}{|k|}\,d|k| = -\frac{1}{4\pi|x|}\,. \ \Box$$

5.3. **Фундаментальное решение оператора теплопроводности.**

Определение 5.13 (Фундаментальное решение оператора теплопроводности)**.** *Пусть*

- $\mathcal{E}\in D'(\mathbb{R}^{n+1})$, *где* $n\geqslant 1$;
- $\frac{\partial\mathcal{E}(x,t)}{\partial t} - a^2\Delta\mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t)$, *где* $a>0$, $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$ *и оператор Лапласа* Δ *действует по переменной* x.

Тогда $\mathcal{E}$ *называют фундаментальным решением оператора теплопроводности в* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 5.14 (Фундаментальное решение оператора теплопроводности в $\mathbb{R}^{n+1}$)**.** *Для любого* $n\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$$

– фундаментальное решение оператора теплопроводности в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Доказательство. Будем искать фундаментальное решение из класса $S'(\mathbb{R}^{n+1})$. Применяя к равенству

$$\frac{\partial\mathcal{E}(x,t)}{\partial t} - a^2\Delta\mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t)$$

преобразование Фурье по переменной x, получим

$$\frac{\partial F[\mathcal{E}](k,t)}{\partial t} + a^2|k|^2F[\mathcal{E}](k,t) = \delta(t). \tag{5.3}$$

Решение уравнения (5.3) имеет вид

$$F[\mathcal{E}](k,t) = e^{-a^2|k|^2t}\theta(t).$$

Отметим, что в классе $S'(\mathbb{R})$ решение уравнения (5.3) единственно, в то время как в классе $D'(\mathbb{R})$ общее решение уравнения (5.3) имеет вид

$$F[\mathcal{E}](k,t) = e^{-a^2|k|^2t}\theta(t) + Ce^{-a^2|k|^2t}, \quad C\in\mathbb{R}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье получим, что

$$\mathcal{E}(x,t) = F^{-1}\left[e^{-a^2|k|^2 t}\theta(t)\right](x,t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|k|^2 t - i(k,x)}\,dk = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\prod_{m=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a^2 k_m^2 t - ik_m x_m}\,dk_m =$$

$$= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\prod_{m=1}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}}\,e^{-\frac{x_m^2}{4a^2 t}} = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}.\ \square$$

5.4. **Фундаментальное решение волнового оператора.**

Определение 5.15 (Фундаментальное решение волнового оператора)**.** *Пусть*

- $\mathcal{E} \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$, *где* $n \geqslant 1$;
- $\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \Delta \mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t)$, *где* $a > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ *и оператор Лапласа* Δ *действует по переменной* x.

Тогда $\mathcal{E}$ *называют фундаментальным решением волнового оператора в* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 5.16 (Фундаментальное решение волнового оператора в $\mathbb{R}^{1+1}$)**.**

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2a}\,\theta(at - |x|)$$

– фундаментальное решение волнового оператора в $\mathbb{R}^{1+1}$.

Доказательство. Будем искать фундаментальное решение из класса $S'(\mathbb{R}^2)$. Применяя к равенству

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x,t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x,t)}{\partial x^2} = \delta(x,t)$$

преобразование Фурье по переменной x, получим

$$\frac{\partial^2 F[\mathcal{E}](k,t)}{\partial t^2} + a^2 k^2 F[\mathcal{E}](k,t) = \delta(t). \tag{5.4}$$

Решение уравнения (5.4) имеет вид

$$F[\mathcal{E}](k,t) = \frac{\sin(akt)}{ak}\theta(t).$$

Применяя обратное преобразование Фурье получим, что

$$\mathcal{E}(x,t) = F^{-1}\left[\frac{\sin(akt)}{ak}\theta(t)\right](x,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\sin(akt)}{ak}e^{-ikx}\,dk = \frac{\theta(t)}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\sin(akt)}{ak}e^{-ikx}\,dk,$$

где γ – контур, полученный деформацией вещественной оси в окрестности начала координат вниз. Следовательно,

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{4i\pi a}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{k}\,e^{i(at-x)k}\,dk - \frac{\theta(t)}{4i\pi a}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{k}\,e^{i(-at-x)k}\,dk =$$

$$= \frac{\theta(t)}{2a}\left[\theta(at-x) - \theta(-at-x)\right] = \frac{1}{2a}\,\theta(at-|x|).\ \square$$

Теорема 5.17 (Фундаментальное решение волнового оператора в $\mathbb{R}^{2+1}$)**.**

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}$$

– фундаментальное решение волнового оператора в $\mathbb{R}^{2+1}$.

Доказательство. Найдем фундаментальное решение из класса $S'(\mathbb{R}^3)$. Применяя к равенству

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}(x,t)}{\partial t^2} - a^2\Delta\mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t)$$

преобразование Фурье по переменной x, получим

$$\frac{\partial^2 F[\mathcal{E}](k,t)}{\partial t^2} + a^2|k|^2F[\mathcal{E}](k,t) = \delta(t). \tag{5.5}$$

Решение уравнения (5.5) имеет вид

$$F[\mathcal{E}](k,t) = \frac{\sin(a|k|t)}{a|k|}\theta(t).$$

Обратное преобразование Фурье функции $\frac{\sin(a|k|t)}{a|k|}$ в классическом смысле не существует. Тем не менее, следующий прием позволяет воспользоваться классической формулой для обратного преобразования Фурье. Из теоремы 4.16 (непрерывность прямого и обратного преобразований Фурье в S') следует, что

$$\mathcal{E}(x,t) = F^{-1}\left[\frac{\sin(a|k|t)}{a|k|}\theta(t)\right](x,t) = \lim_{\varepsilon\to+0} F^{-1}\left[\frac{\sin(a|k|t)}{a|k|}\,e^{-\varepsilon|k|}\theta(t)\right](x,t),$$

где предел при $\varepsilon\to+0$ понимается в смысле обобщенных функций. При $\varepsilon>0$ обратное преобразование Фурье можно понимать в классическом смысле, следовательно,

$$F^{-1}\left[\frac{\sin(a|k|t)}{a|k|}\,e^{-\varepsilon|k|}\theta(t)\right](x,t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\sin(a|k|t)}{a|k|}\,e^{-\varepsilon|k|-i(k,x)}\,dk_1\,dk_2 =$$

$$= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2a}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin(a|k|t)\,e^{-\varepsilon|k|-i|k||x|\cos\varphi}\,d|k|\,d\varphi =$$

$$= \frac{\theta(t)}{8i\pi^2a}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[e^{-|k|(\varepsilon+i|x|\cos\varphi-iat)} - e^{-|k|(\varepsilon+i|x|\cos\varphi+iat)}\right]\,d|k|\,d\varphi =$$

$$= \frac{\theta(t)}{8i\pi^2a}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon+i|x|\cos\varphi-iat} - \frac{1}{\varepsilon+i|x|\cos\varphi+iat}\right]\,d\varphi.$$

Последние два интеграла берутся по вычетам, откуда

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\theta(t)}{8i\pi^2a}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\varepsilon+i|x|\cos\varphi-iat}\,d\varphi = \frac{\theta(at-|x|)\theta(t)}{4\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}} + \frac{\theta(|x|-at)\theta(t)}{4i\pi a\sqrt{|x|^2-a^2t^2}},$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\theta(t)}{8i\pi^2a}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\varepsilon+i|x|\cos\varphi+iat}\,d\varphi = -\frac{\theta(at-|x|)\theta(t)}{4\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}} + \frac{\theta(|x|-at)\theta(t)}{4i\pi a\sqrt{|x|^2-a^2t^2}}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)\theta(t)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}} = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}. \ \square$$

Теорема 5.18 (Преобразование Фурье δ-функции, сосредоточенной на сфере в $\mathbb{R}^3$)**.** *Пусть*

- $S_R = \{x \mid x = (x_1, x_2, x_3),\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}$, *где* $R > 0$*;*
- $\delta_{S_R}(x)$ *– δ-функция, сосредоточенная на сфере* S_R*.*

Тогда

$$F[\delta_{S_R}](k) = 4\pi R\,\frac{\sin(R|k|)}{|k|}\,.$$

Доказательство. Для любой $\varphi \in S(\mathbb{R}^3)$ верно, что

$$(F[\delta_{S_R}](k), \varphi(k)) = (\delta_{S_R}(x), F[\varphi](x)) = \iint\limits_{S_R} F[\varphi](x)\,dS = \iint\limits_{S_R}\left(\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi(k)e^{i(k,x)}\,dV_k\right)dS_x =$$

$$= \iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\iint\limits_{S_R} e^{i(k,x)}\,dS_x\right)\varphi(k)\,dV_k.$$

Следовательно,

$$F[\delta_{S_R}](k) = \iint\limits_{S_R} e^{i(k,x)}\,dS_x = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{i|k|R\cos\theta}R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 2\pi R^2\int\limits_0^{\pi} e^{i|k|R\cos\theta}\sin\theta\,d\theta =$$

$$= -2\pi R^2\frac{1}{i|k|R}\,e^{i|k|R\cos\theta}\Big|_0^{\pi} = 4\pi R\,\frac{\sin(R|k|)}{|k|}\,. \ \square$$

Теорема 5.19 (Фундаментальное решение волнового оператора в $\mathbb{R}^{3+1}$)**.**

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\,\delta_{S_{at}}(x)$$

– фундаментальное решение волнового оператора в $\mathbb{R}^{3+1}$*, где*

$$S_{at} = \{x \mid x = (x_1, x_2, x_3),\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2t^2\}.$$

Доказательство. Найдем фундаментальное решение из класса $S'(\mathbb{R}^4)$. Применяя к равенству

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}(x,t)}{\partial t^2} - a^2\Delta\mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t)$$

преобразование Фурье по переменной x, получим

$$\frac{\partial^2 F[\mathcal{E}](k,t)}{\partial t^2} + a^2|k|^2F[\mathcal{E}](k,t) = \delta(t). \tag{5.6}$$

Решение уравнения (5.6) имеет вид

$$F[\mathcal{E}](k,t) = \frac{\sin(a|k|t)}{a|k|}\theta(t).$$

Отсюда и из теоремы 5.18 следует, что

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x). \ \square$$

5.5. **Фундаментальное решение оператора Шредингера.**

Определение 5.20 (Фундаментальное решение оператора Шредингера)**.** *Пусть*

- $\mathcal{E} \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$, *где* $n \geqslant 1$;
- $i\frac{\partial \mathcal{E}(x,t)}{\partial t} - \Delta \mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t)$, *где* $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ *и оператор Лапласа* Δ *действует по переменной* x.

Тогда $\mathcal{E}$ *называют фундаментальным решением оператора Шредингера в* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 5.21 (Фундаментальное решение оператора Шредингера в $\mathbb{R}^{n+1}$)**.**

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{-i\theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{i\frac{|x|^2}{4t} - i\frac{\pi n}{4}}$$

– *фундаментальное решение оператора Шредингера в* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Доказательство. Будем искать фундаментальное решение из класса $S'(\mathbb{R}^{n+1})$. Применяя к равенству

$$i\frac{\partial \mathcal{E}(x,t)}{\partial t} - \Delta \mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t)$$

преобразование Фурье по переменной x, получим

$$i\frac{\partial F[\mathcal{E}](k,t)}{\partial t} + |k|^2 F[\mathcal{E}](k,t) = \delta(t). \tag{5.7}$$

Решение уравнения (5.7) имеет вид

$$F[\mathcal{E}](k,t) = -ie^{i|k|^2 t}\theta(t).$$

Применяя обратное преобразование Фурье получим, что

$$\mathcal{E}(x,t) = -iF^{-1}\left[e^{i|k|^2 t}\theta(t)\right](x,t) = \frac{-i\theta(t)}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i|k|^2 t - i(k,x)}\, dk = \frac{-i\theta(t)}{(2\pi)^n} \prod_{m=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ik_m^2 t - ik_m x_m}\, dk_m =$$

$$= \frac{-i\theta(t)}{(2\pi)^n} \prod_{m=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{i\frac{x_m^2}{4t} - i\frac{\pi}{4}} = \frac{-i\theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{i\frac{|x|^2}{4t} - i\frac{\pi n}{4}}. \ \square$$

6. Введение в задачи математической физики.

6.1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Определение 6.1 (Общий вид неоднородного линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка). *Пусть*

- D – *открытое множество в* $\mathbb{R}^n$, *где* $n \geqslant 2$;
- $\forall\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad a_{ij} : D \to \mathbb{C},\ b_i : D \to \mathbb{C},\ c : D \to \mathbb{C},\ f : D \to \mathbb{C}.$

Тогда уравнение вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in D,$$

где u – *неизвестная функция, называют неоднородным линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.*

Замечание 6.2. *Для* $u \in C^2(D)$ *верно равенство*

$$\forall\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}(x) + a_{ji}(x)}{2}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Другими словами, матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ *в определении* 6.1 *всегда можно считать симметричной*[3].

Определение 6.3 (Положительно определенная матрица). *Пусть*

- D – *множество;*
- $\forall\ x \in D\ A(x)$ – *вещественная квадратная матрица* $n \times n$;
- $(\cdot, \cdot)$ – *скалярное произведение в* $\mathbb{R}^n$;
- $\forall\ x \in D\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (A(x)\xi, \xi) > 0.$

Тогда говорят, что A – *положительно определенная матрично-значная функция на* D.

Определение 6.4 (Эллиптический тип дифференциального уравнения в частных производных). *Пусть*

- D – *открытое множество в* $\mathbb{R}^n$, *где* $n \geqslant 2$;
- $\forall\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\ a_{ij},\ b_i : D \to \mathbb{C},\ c,\ f : D \to \mathbb{C}$;
- $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – *вещественная симметричная положительно определенная матрично-значная функция.*

Тогда уравнение вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in D$$

называют дифференциальным уравнением в частных производных эллиптического типа.

---

[3] Матрицу A называют симметричной, если $\forall\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\ a_{ij} = a_{ji}$.

Определение 6.5 (Параболический тип дифференциального уравнения в частных производных). *Пусть*

- D – *открытое множество в* $\mathbb{R}^n$, *где* $n \geqslant 1$;
- $\forall\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $a_{ij},\ b_i : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ c,\ f : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$;
- $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – *вещественная симметричная положительно определенная матричнозначная функция на* $D \times \mathbb{R}$.

Тогда уравнение вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)u(x,t) = f(x,t),$$

где $x \in D,\ t \in \mathbb{R}$ *называют дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа.*

Определение 6.6 (Гиперболический тип дифференциального уравнения в частных производных). *Пусть*

- D – *открытое множество в* $\mathbb{R}^n$, *где* $n \geqslant 1$;
- $\forall\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $a_{ij},\ b_i,\ c : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ d,\ f : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$;
- $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – *вещественная симметричная положительно определенная матричнозначная функция на* $D \times \mathbb{R}$.

Тогда уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + d(x,t)u(x,t) = f(x,t),$$

где $x \in D,\ t \in \mathbb{R}$ *называют дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа.*

Определение 6.7 (Уравнение Шредингера). *Пусть*

- D – *открытое множество в* $\mathbb{R}^n$, *где* $n \geqslant 1$;
- $\forall\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $a_{ij},\ b_i : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ c,\ f : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$;
- $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – *вещественная симметричная положительно определенная матричнозначная функция на* $D \times \mathbb{R}$.

Тогда уравнение вида

$$i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)u(x,t) = f(x,t),$$

где $x \in D,\ t \in \mathbb{R}$ *называют уравнением Шредингера.*

6.2. **Формулы Грина.**

Определение 6.8 (Гладкость границы области). *Пусть*

- D – *открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$, *где* $n \geqslant 2$;
- ∂D – *граница* D.

Тогда говорят, что граница ∂D *принадлежит классу* C^2 *и пишут* $\partial D \in C^2$, *если для любой точки* $x_0 \in \partial D$ *найдутся ее окрестность* U *и отображение* $\varphi : (0,1)^n \to U$ *такие, что*

(1) φ – *биекция с куба* $(0,1)^n$ *на область* U, $\varphi \in C^2((0,1)^n)$ *и* $\varphi^{-1} \in C^2(U)$ *(другими словами,* φ – *диффеоморфизм с куба* $(0,1)^n$ *на окрестность* U*);*

(2) $\varphi(\{x \mid x_1 = 0, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (0,1)^n\}) = \partial D \cap U$.

Теорема 6.9 (Первая формула Грина)**.** *Пусть*

- D *– открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$*;*
- $\partial D \in C^2$*, где* ∂D *– граница* D*;*
- $u \in C^1(\overline{D})$*,* $v \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$*,* $\Delta v \in C(\overline{D})$*.*

Тогда справедлива первая формула Грина

$$\int\limits_D \Big(u\Delta v + (\nabla u, \nabla v)\Big)\, dV = \int\limits_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n}\, dS.$$

Доказательство. Без доказательства (доказано на 2-ом курсе). □

Теорема 6.10 (Вторая формула Грина)**.** *Пусть*

- D *– открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$*;*
- $\partial D \in C^2$*, где* ∂D *– граница* D*;*
- $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$*,* $\Delta u \in C(\overline{D})$*,* $v \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$*,* $\Delta v \in C(\overline{D})$*.*

Тогда справедлива вторая формула Грина

$$\int\limits_D \Big(u\Delta v - v\Delta u\Big)\, dV = \int\limits_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\, dS.$$

Доказательство. Без доказательства (доказано на 2-ом курсе). □

Теорема 6.11 (Принцип максимума для гармонических функций)**.** *Пусть*

- D *– открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$*, где* $n \geqslant 2$*;*
- ∂D *– граница* D*;*
- $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$*;*
- $\Delta u = 0$ *в* D*;*
- u *– не тождественно постоянна в* D*.*

Тогда

$$\forall\ x_0 \in D \qquad \min_{x \in \partial D} u(x) < u(x_0) < \max_{x \in \partial D} u(x).$$

Доказательство. При $n = 2$ доказано ранее. При $n > 2$ без доказательства (следует из теоремы о среднем, которая выводится из второй формулы Грина). □

6.3. **Краевые задачи для оператора Лапласа.**

Теорема 6.12 (Существование и единственность решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона)**.** *Пусть*

- D *– открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$*, где* $n \geqslant 2$*;*
- $\partial D \in C^2$*, где* ∂D *– граница* D*;*
- $f \in C^1(\overline{D})$ *(нельзя заменить условием* $f \in C(\overline{D})$*);*
- $g \in C(\partial D)$*.*

Тогда

(1) *существует решение задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in D, \\ \quad u = g, & x \in \partial D, \\ u \in C^2(D) \cap C(\overline{D}). \end{cases} \tag{6.1}$$

(2) *решение задачи* (6.1) *единственно.*

Доказательство. (1) Существование решения оставим без доказательства.

(2) Докажем единственность решения. Пусть u_1 и u_2 решения задачи Дирихле (6.1) и $u = u_1 - u_2$. Тогда u – гармоническая функция в D, причем u тождественно обращается в ноль на границе ∂D. Отсюда и из принципа максимума для гармонических функций следует, что u – постоянная функция в области D. Учитывая, что на границе ∂D функция u обращается в ноль, получим, что u тождественно равна нулю всюду в $\overline{D}$. Отсюда и из условия $u = u_1 - u_2$ получим, что $u_1 = u_2$ всюду в $\overline{D}$. □

Теорема 6.13 (Существование и единственность решения внутренней задачи Неймана для уравнения Пуассона)**.** *Пусть*

- D *– открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$*, где* $n \geqslant 2$*;*
- $\partial D \in C^2$*, где* ∂D *– граница* D*;*
- $f \in C^1(\overline{D})$*;*
- $g \in C^1(\partial D)$.

Тогда

(1) *для существования решения задачи Неймана*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & x \in \partial D, \\ u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}). \end{cases} \tag{6.2}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int\limits_D f(x)\,dV = \int\limits_{\partial D} g(x)\,dS; \tag{6.3}$$

(2) *решение задачи* (6.2) *единственно с точностью до прибавления произвольной постоянной.*

Доказательство. (1) Достаточность выполнения условия (6.3) для существования решения задачи (6.2) оставим без доказательства.

Докажем, что для существования решения задачи (6.2) необходимо выполнения условия (6.3). Пусть u – решения задачи (6.2), тогда из теоремы 6.9 (первая формула Грина) при $v \equiv 1$ получим, что

$$\int\limits_D \Big(v\Delta u + (\nabla v, \nabla u)\Big)\,dV = \int\limits_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS \implies \int\limits_D \Delta u\,dV = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS \implies \int\limits_D f(x)\,dV = \int\limits_{\partial D} g(x)\,dS.$$

(2) Докажем «единственность» решения. Пусть u_1 и u_2 решения задачи Неймана (6.2) и $u = u_1 - u_2$. Из теоремы 6.9 (первая формула Грина) при $v \equiv u$ вытекает, что

$$\int\limits_D |\nabla u|^2\,dV = \int\limits_D \Big(u\Delta u + (\nabla u, \nabla u)\Big)\,dV = \int\limits_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = 0.$$

Таким образом, $\nabla u \equiv 0$ в области D и, следовательно, u – постоянная функция в области D. □

Теорема 6.14 (Существование и единственность решения внутренней смешанной задачи для уравнения Пуассона)**.** *Пусть*

- D *– открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$*, где* $n \geqslant 2$*;*
- $\partial D \in C^2$*, где* ∂D *– граница* D*;*

- $f \in C^1(\overline{D})$;
- $\sigma \in C^1(\partial D)$.
- $g \in C^1(\partial D)$.

Тогда

(1) *для существования решения смешанной задачи*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), \quad x \in D, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} + \sigma(x) u = g(x), \quad x \in \partial D, \\ u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}), \end{cases} \tag{6.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого решения u_0 задачи

$$\begin{cases} \Delta u_0(x) = 0, \quad x \in D, \\ \frac{\partial u_0(x)}{\partial n} + \sigma(x) u_0 = 0, \quad x \in \partial D, \\ u_0 \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}) \end{cases} \tag{6.5}$$

выполнялось условие

$$\int\limits_D f(x) u_0(x)\, dV = \int\limits_{\partial D} g(x) u_0(x)\, dS; \tag{6.6}$$

(2) *решение задачи* (6.4) *единственно с точностью до прибавления произвольного решения задачи* (6.5).

Доказательство. (1) Достаточность выполнения условия (6.6) для существования решения задачи (6.4) оставим без доказательства.

Докажем, что для существования решения задачи (6.4) необходимо выполнения условия (6.6). Пусть u – решения задачи (6.4), тогда из теоремы 6.10 (вторая формула Грина) при $v = u_0$ получим, что

$$\int\limits_D \Big(u \Delta u_0 - u_0 \Delta u \Big)\, dV = \int\limits_{\partial D} \left(u \frac{\partial u_0}{\partial n} - u_0 \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

$$-\int\limits_D u_0 f\, dV = \int\limits_{\partial D} \left(-u\sigma(x) u_0 - u_0 (g - \sigma(x) u) \right) dS,$$

$$\int\limits_D u_0 f\, dV = \int\limits_{\partial D} u_0 g\, dS.$$

(2) Докажем «единственность» решения. Пусть u_1 и u_2 решения смешанной задачи (6.4) и $u = u_1 - u_2$. Для завершения доказательства осталось заметить, что u – решение задачи (6.5). □

Определение 6.15 (Регулярное поведение гармонической функции на бесконечности)**.** *Пусть*

- D *– открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$, *где* $n \geqslant 2$;
- $\partial D \in C^2$, *где* ∂D *– граница* D;
- $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus D)$;
- $\Delta u = 0$ *в* $\mathbb{R}^n \setminus D$.

Тогда говорят, что гармоническая функция и регулярна на бесконечности, если

(1) *случай* $n = 2$: $u(x) = o(\ln |x|)$ *при* $x \longrightarrow \infty$;
(2) *случай* $n > 2$: $u(x) = o(1)$ *при* $x \longrightarrow \infty$.

Теорема 6.16 (Существование и единственность решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа)**.** *Пусть*

- D – *открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$, *где* $n \geqslant 2$;
- $\partial D \in C^2$, *где* ∂D – *граница* D;
- $g \in C(\partial D)$.

Тогда

(1) *существует решение задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}, \\ \quad u = g, & x \in \partial D, \\ u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^n \setminus D), \\ u - \text{регулярна на бесконечности.} \end{cases} \tag{6.7}$$

(2) *решение задачи* (6.7) *единственно.*

Доказательство. (1) Существование решения оставим без доказательства.

(2) Единственность решения при $n = 2$ оставим без доказательства.

Докажем единственность решения при $n > 2$. Пусть u_1 и u_2 решения задачи Дирихле (6.7) и $u = u_1 - u_2$. Рассмотрим вспомогательную область

$$G_R = \{x \mid |x| < R\} \setminus \overline{D},$$

где R – достаточно большое положительное число. Тогда u – гармоническая функция в G_R, причем при достаточно больших R функция u на границе ∂G_R может быть сделана сколь угодно малой. Отсюда и из принципа максимума для гармонических функций следует, что u – постоянная функция в области $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$. Учитывая, что на границе ∂D функция u обращается в ноль, получим, что u тождественно равна нулю всюду в $\mathbb{R}^n \setminus D$. Отсюда и из условия $u = u_1 - u_2$ получим, что $u_1 = u_2$ всюду в $\mathbb{R}^n \setminus D$. $\square$

Теорема 6.17 (Контр-пример к теореме о единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа)**.** *Решение задачи Дирихле (без условия регулярности на бесконечности)*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |x| > 1, \ x \in \mathbb{R}^n, \ n \geqslant 2, \\ \quad u = 0, & |x| = 1 \end{cases} \tag{6.8}$$

не является единственным.

Доказательство. При $n = 2$ для любого $C \in \mathbb{R}$ функция $u = C \ln |x|$ является решением задачи (6.8).

При $n > 2$ для любого $C \in \mathbb{R}$ функция $u = C(|x|^{2-n} - 1)$ является решением задачи (6.8). $\square$

6.4. **Функция Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа.**

Теорема 6.18 (Представление произвольной гладкой функции в виде суммы потенциалов (объемного, простого и двойного слоя))**.** *Пусть*

- E – *ядро фундаментального решения* $\mathcal{E}$ *оператора Лапласа в* $\mathbb{R}^n$, *где* $n \geqslant 2$;
- $E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|$ *при* $n = 2$ *и* $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$ *при* $n = 3$;
- D – *открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$;
- $\partial D \in C^2$, *где* ∂D – *граница* D;
- $u \in C^2(\overline{D})$.

Тогда

$$\forall\ x \in D \quad u(x) = \int\limits_D E(x-y)\Delta u(y)\, dV_y + \int\limits_{\partial D} \left(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} - E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) dS_y.$$

Доказательство. Пусть $B_\varepsilon = \{y \mid |y-x| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon = D \setminus B_\varepsilon$. Из теоремы 6.10 (вторая формула Грина) следует, что

$$\int\limits_{D_\varepsilon} \Big(u(y)\Delta E(x-y) - E(x-y)\Delta u(y) \Big)\, dV_y = \int\limits_{\partial D_\varepsilon} \left(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} - E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) dS_y,$$

где n – внешняя нормаль к границе области D_ε. Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ (также как при доказательстве теоремы 5.11), получим, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{D_\varepsilon} \Big(u(y)\Delta E(x-y) - E(x-y)\Delta u(y) \Big)\, dV_y = -\int\limits_D E(x-y)\Delta u(y)\, dV_y,$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon} \left(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} - E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) dS_y = u(x).$$

где n – внешняя нормаль к границе шару B_ε (и внутренняя по отношению к области D_ε). Следовательно,

$$u(x) = \int\limits_D E(x-y)\Delta u(y)\, dV_y + \int\limits_{\partial D} \left(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} - E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) dS_y. \ \square$$

Определение 6.19 (Логарифмический потенциал)**.** *Пусть*

- *D – открытое, ограниченное множество в $\mathbb{R}^2$;*
- *$\rho \in C(D)$.*

Тогда интеграл вида

$$\forall\ x \in D \quad u(x) = \int\limits_D \rho(y) \ln\frac{1}{|x-y|}\, dV_y \equiv \iint\limits_D \rho(y_1, y_2) \ln\frac{1}{|x-y|}\, dy_1\, dy_2$$

называют логарифмическим потенциалом с плотностью ρ в области D.

Определение 6.20 (Объемный потенциал)**.** *Пусть*

- *D – открытое, ограниченное множество в $\mathbb{R}^3$;*
- *$\rho \in C(D)$.*

Тогда интеграл вида

$$\forall\ x \in D \quad u(x) = \int\limits_D \frac{\rho(y)}{|x-y|}\, dV_y \equiv \iiint\limits_D \frac{\rho(y_1, y_2, y_3)}{|x-y|}\, dy_1\, dy_2\, dy_3$$

называют объемным потенциалом с плотностью ρ в области D.

Определение 6.21 (Потенциал простого слоя в $\mathbb{R}^2$)**.** *Пусть*

- *γ – гладкая ограниченная кривая в $\mathbb{R}^2$;*
- *$\rho \in C(\gamma)$.*

Тогда интеграл вида

$$\forall\ x \notin \gamma \quad u(x) = \int\limits_{\gamma} \rho(y) \ln \frac{1}{|x-y|}\, dl_y$$

называют потенциалом простого слоя в $\mathbb{R}^2$ *с плотностью* ρ *на кривой* γ.

Определение 6.22 (Потенциал простого слоя в $\mathbb{R}^3$). *Пусть*

- S *– гладкая ограниченная поверхность в* $\mathbb{R}^3$*;*
- $\rho \in C(S)$.

Тогда интеграл вида

$$\forall\ x \notin S \quad u(x) = \int\limits_{S} \frac{\rho(y)}{|x-y|}\, dS_y$$

называют потенциалом простого слоя в $\mathbb{R}^3$ *с плотностью* ρ *на поверхности* S.

Определение 6.23 (Потенциал двойного слоя в $\mathbb{R}^2$). *Пусть*

- γ *– гладкая ограниченная кривая в* $\mathbb{R}^2$*;*
- $\rho \in C(\gamma)$.

Тогда интеграл вида

$$\forall\ x \notin \gamma \quad u(x) = \int\limits_{\gamma} \rho(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|}\, dl_y$$

называют потенциалом двойного слоя в $\mathbb{R}^2$ *с плотностью* ρ *на кривой* γ.

Определение 6.24 (Потенциал двойного слоя в $\mathbb{R}^3$). *Пусть*

- S *– гладкая ограниченная поверхность в* $\mathbb{R}^3$*;*
- $\rho \in C(S)$.

Тогда интеграл вида

$$\forall\ x \notin S \quad u(x) = \int\limits_{S} \rho(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|}\, dS_y$$

называют потенциалом двойного слоя с плотностью ρ *на поверхности* S.

Определение 6.25 (Функция Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа). *Пусть*

- E *– ядро фундаментального решения* $\mathcal{E}$ *оператора Лапласа в* $\mathbb{R}^n$*, где* $n \geqslant 2$*;*
- $E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln|x|$ *при* $n = 2$ *и* $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$ *при* $n = 3$*;*
- D *– открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$*;*
- $\partial D \in C^2$*, где* ∂D *– граница* D*;*
- $U(x,y)$ *– решение краевой задачи*

$$\forall\ y \in D \quad \begin{cases} \Delta_x U(x,y) = 0, \quad x \in D, \\ U(x,y) = -E(x-y), \quad x \in \partial D, \\ U \in C^2(D) \cap C(\overline{D}). \end{cases}$$

Тогда говорят, что $G(x,y) = E(x-y) + U(x,y)$ *– функция Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в области* D.

Замечание 6.26. *Грубо говоря, можно сказать, что функция Грина является (единственным) решением задачи*

$$\forall\ y \in D \quad \begin{cases} \Delta_x g(x,y) = \delta(x-y), & x \in D, \\ G(x,y) = 0, & x \in \partial D. \end{cases}$$

Теорема 6.27 (Основные свойства функции Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа)**.** *Пусть*

- *D – открытое, ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$;*
- *$\partial D \in C^2$, где ∂D – граница D.*

Тогда

(1) *функция Грина G внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D существует и единственна;*
(2) *для любых $(x,y) \in D^2$ таких, что $x \neq y$ верно, что $G(x,y) = G(y,x)$.*

Доказательство. (1) Следует из теоремы 6.12.

(2) Пусть $(x_1, x_2) \in D^2$, $x_1 \neq x_2$, $u(x) = G(x, x_1)$, $v(x) = G(x, x_2)$, $B^1_\varepsilon = \{x \mid |x - x_1| < \varepsilon\}$, $B^2_\varepsilon = \{x \mid |x - x_2| < \varepsilon\}$ и $D_\varepsilon = D \setminus (B^1_\varepsilon \cup B^2_\varepsilon)$, где ε – малое положительное число.

Ради упрощения выкладок, дальнейшее доказательство проведем в дополнительном предположении, что $u \in C^1(\overline{D_\varepsilon})$, $v \in C^1(\overline{D_\varepsilon})$. Из теоремы 6.10 (вторая формула Грина) следует, что

$$\int\limits_{D_\varepsilon} \Big(u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)\Big)\, dV = \int\limits_{\partial D_\varepsilon} \left(u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial n} - v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right) dS,$$

где n – внешняя нормаль к границе области D_ε. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\partial B^1_\varepsilon} \left(u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial n} - v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right) dS = \int\limits_{\partial B^2_\varepsilon} \left(v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial n}\right) dS.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (6.4) (также как при доказательстве теоремы 5.11), получим, что

$$v(x_1) = u(x_2).$$

Для завершения доказательства осталось вспомнить, что $u(x) = G(x, x_1)$, $v(x) = G(x, x_2)$. □

Теорема 6.28 (Выражение решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона через функцию Грина)**.** *Пусть*

- *D – открытое, ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 2$;*
- *$\partial D \in C^2$, где ∂D – граница D;*
- *G – функция Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D.*
- *$f \in C^1(\overline{D})$;*
- *$g \in C(\partial D)$;*
- *u – решение задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in D, \\ \quad u = g, & x \in \partial D, \\ u \in C^2(D) \cap C(\overline{D}). \end{cases}$$

Тогда

$$\forall\ x \in D \quad u(x) = \int\limits_D G(x,y) f(y)\, dV_y + \int\limits_{\partial D} g(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\, dS_y.$$

Доказательство. Доказательство проведем в предположении, что $u \in C^2(\overline{D})$ и для всех $y \in D$ функция Грина $G(\cdot, y)$ имеет непрерывные производные вблизи границы ∂D. В этом случае доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 6.18. При этом в качестве ядра фундаментального решения необходимо взять функцию Грина G. □

6.5. **Функция Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в шаре (метод отражений).**

Теорема 6.29 (Функция Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в шаре (метод отражений))**.** *Пусть*

- E *– центрально-симметричное ядро фундаментального решения оператора Лапласа в* $\mathbb{R}^n$*, где* $n \geqslant 2$*;*
- B_R *– открытый шар радиуса* $R > 0$ *с центром в начале координат в* $\mathbb{R}^n$*.*

Тогда функция Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в шаре B_R *имеет вид*

$$G(x,y) = E(x-y) - E\left(\frac{|y|}{R}(x - y_*)\right),$$

где $y_* = y\frac{R^2}{|y|^2}$ *– симметричная к точке* y *относительно сферы* ∂B_R*.*

Доказательство. При $y \in B_R$ функция Грина $G(x,y)$ имеет две особые точки $x = y \in B_R$ и $x = y_* \notin \overline{B_R}$. Отсюда легко следует, что

$$\forall\ y \in B_R \quad \Delta g(x,y) = \delta(x-y) - C\delta(x - y_*),$$

где g – регулярная обобщенная функция с ядром G и C – некоторая постоянная.

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\forall\ y \in B_R\ \forall\ x \in \partial B_R \quad G(x,y) = 0.$$

Пусть φ – угол между векторами x и y, тогда

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\varphi = R^2 + |y|^2 - 2R|y|\cos\varphi,$$

$$\left|\frac{|y|}{R}(x - y_*)\right|^2 = \left|\frac{x|y|}{R} - \frac{yR}{|y|}\right|^2 = |y|^2 + R^2 - 2R|y|\cos\varphi.$$

Другими словами,

$$\forall\ y \in B_R\ \forall\ x \in \partial B_R \quad |x - y| = \left|\frac{|y|}{R}(x - y_*)\right|$$

и, следовательно,

$$\forall\ y \in B_R\ \forall\ x \in \partial B_R \quad G(x,y) = E(x-y) - E\left(\frac{|y|}{R}(x - y_*)\right) = 0. \ \square$$

Теорема 6.30. *Пусть*

- B_R *– открытый шар радиуса* $R > 0$ *с центром в начале координат в* $\mathbb{R}^n$*, где* $n \geqslant 2$*;*
- S_R *– граница шара* B_R*;*
- $g \in C(\partial S_R)$*;*

- u – *решение задачи Дирихле* $\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in B_R, \\ u = g, & x \in S_R, \\ u \in C^2(B_R) \cap C(\overline{B_R}). \end{cases}$

Тогда

$$\forall\ x \in B_R \quad u(x) = \frac{R^2 - r^2}{\omega_n R} \int\limits_{S_R} \frac{g(y)}{(R^2 + r^2 - 2rR\cos\varphi)^{n/2}}\, dS_y$$

где ω_n *– площадь поверхности единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$, $r = |x|$ *и* φ *– угол между векторами* x *и* y *(т. е.* $(x, y) = rR\cos\varphi$*).*

Доказательство. Следует из 6.29. Без доказательства. □

6.6. Конформная инвариантность оператора Лапласа в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 6.31 (Конформная инвариантность оператора Лапласа в $\mathbb{R}^2$)**.** *Пусть*

- D *и* D_* *– открытые связные множества в* $\mathbb{C}$*;*
- F *– конформное отображение* D *на* D_**;*
- $v \in C^2(D_*)$*;*
- $u = v \circ F$*;*
- $z \in D$, $w = F(z) \in D_*$.

Тогда

$$\Delta u(z) = |F'(z)|^2 \Delta v(w).$$

Доказательство. Пусть $z = x + iy$ и $w = \xi + i\eta$. Заметим, что $x = \frac{z+\bar z}{2}$, $y = \frac{z-\bar z}{2i}$ и

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{\partial x}{\partial \bar z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial \bar w}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar w} = \left[\frac{\partial w}{\partial z} = F'(z),\ \frac{\partial \bar w}{\partial z} = 0\right] = F'(z)\frac{\partial}{\partial w},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{\partial w}{\partial \bar z}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial \bar w}{\partial \bar z}\frac{\partial}{\partial \bar w} = \left[\frac{\partial w}{\partial \bar z} = 0,\ \frac{\partial \bar w}{\partial \bar z} = \overline{F'(z)}\right] = \overline{F'(z)}\frac{\partial}{\partial \bar w}.$$

Следовательно,

$$\Delta u(z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) u(z) = 4\frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{\partial}{\partial z} u(z) =$$

$$= 4\frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{\partial}{\partial z} v(w) = 4\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(F'(z)\frac{\partial v(w)}{\partial w}\right) = 4F'(z)\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{\partial v(w)}{\partial w}\right) = 4F'(z)\overline{F'(z)}\frac{\partial}{\partial \bar w}\frac{\partial v(w)}{\partial w} =$$

$$= 4|F'(z)|^2\frac{\partial^2 v(w)}{\partial \bar w \partial w} = |F'(z)|^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) v(w) = |F'(z)|^2 \Delta v(w). \ \square$$

Теорема 6.32 (Функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в области в $\mathbb{R}^2$ (представление через конформное отображение))**.** *Пусть*

- D *– открытое ограниченное множество в* $\mathbb{C}$*;*
- F *– конформное отображение* D *на единичный круг* $D_* = \{w \mid |w| < 1\}$*;*
- g *– функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в области* D*;*

- *G – ядро обобщенной функции g.*

Тогда

$$G(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{1-F(z)\overline{F(z_0)}}\right|.$$

Доказательство. Заметим, что

$$H(z)=\frac{F(z)-F(z_0)}{1-F(z)\overline{F(z_0)}}$$

конформное отображение области D на круг D_*. Отсюда легко следует, что

$$\forall\ z\in\partial D\ \forall\ z_0\in D\quad |H(z)|=1,\quad G(z,z_0)=0.$$

Далее, из теоремы 6.31 получим, что

$$\Delta_z G(z,z_0)=|H'(z)|^2\Delta_w\left(\frac{1}{2\pi}\ln|w|\right),$$

где $w=H(z)$, $\Delta_z=\partial_x^2+\partial_y^2$ и $\Delta_w=\partial_\xi^2+\partial_\eta^2$. Отсюда, с учетом очевидного равенства $H(z_0)=0$, следует, что

$$\Delta_z g(z,z_0)=|H'(z)|^2\delta(w)=\delta(z-z_0).$$

Последнее равенство также можно получить раскладывая функцию F в ряд Тейлора

$$G(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{1-F(z)\overline{F(z_0)}}\right|=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{F'(z_0)(z-z_0)+O((z-z_0)^2)}{1-|F(z_0)|^2+O(z-z_0)}\right|=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\ln|z-z_0|+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|F'(z_0)|}{1-|F(z_0)|^2}+O(z-z_0).\ \square$$

Пример 6.33. *Найти функцию Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в области*

$$D=\{z\mid |z|<1,\ \mathrm{Re}(z)>0\}.$$

Решение. Конформное отображение F области D на единичный круг $D_*=\{w\mid |w|<1\}$ можно выбрать в виде

$$F(z)=\frac{(z-1)^2+i(z+1)^2}{(z-1)^2-i(z+1)^2}.$$

Отсюда и из теоремы 6.32 следует, что функция Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D имеет вид

$$G(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{1-F(z)\overline{F(z_0)}}\right|.\square$$

6.7. **Задача Коши для оператора теплопроводности во всем пространстве.**

Определение 6.34 (Классическая задача Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^{n+1}$). *Пусть*

- *$F:\mathbb{R}^n\times[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ и $U_0:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ – заданные функции, где $n\in\mathbb{N}$;*
- *$a>0$ – заданная постоянная;*
- *$U:\mathbb{R}^n\times[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ – функция, которую требуется определить.*

Тогда классической задачей Коши для уравнения теплопроводности называют задачу вида

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} - a^2 \Delta U(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty), \\ U(x,t)\big|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ U \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)). \end{cases} \tag{6.9}$$

Определение 6.35 (Обобщенная задача Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^{n+1}$)**.** *Пусть*

- $f \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ *и* $u_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$ *– заданные обобщенные функции, где* $n \in \mathbb{N}$*;*
- $\operatorname{supp} f(x,t) \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$*;*
- $a > 0$ *– заданная постоянная;*
- $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ *– обобщенная функция, которую требуется определить.*

Тогда обобщенной задачей Коши для уравнения теплопроводности называют задачу вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x,t) = f(x,t) + u_0(x)\delta(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ \operatorname{supp} u(x,t) \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty), \\ u \in S'(\mathbb{R}^{n+1}). \end{cases} \tag{6.10}$$

Теорема 6.36 (Теорема существования и единственности решения обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^{n+1}$)**.** *Пусть*

- $n \in \mathbb{N}$*,* $R > 0$*,* $B_R = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ |x| < R\}$ *и* $T > 0$*;*
- $f \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$*,* $u_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$*;*
- $\operatorname{supp} f(x,t) \subset B_R \times [0,T]$*,* $\operatorname{supp} u_0(x) \subset B_R$*.*

Тогда решение обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности (6.10) *существует, единственно и может быть записано в виде*

$$u(x,t) = \Big(\mathcal{E}(y,\tau) * \big[f(y,\tau) + u_0(y)\delta(\tau)\big]\Big)(x,t), \tag{6.11}$$

где $\mathcal{E}$ *– фундаментальное решение оператора теплопроводности, удовлетворяющее условию*

$$\operatorname{supp} \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty).$$

Доказательство. Легко видеть, что носитель обобщенной функции $f(y,\tau) + u_0(y)\delta(\tau)$ ограничен. Отсюда и из включения $\mathcal{E} \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ следует, что свертка в формуле (6.11) корректно определена и, кроме того, $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$.

Фундаментальное решение $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{supp} \mathcal{E}(x,t) \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty),$$

откуда следует, что

$$\operatorname{supp} u(x,t) \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty).$$

Из теоремы 5.8 следует, что обобщенная функция (6.11) является решением задачи (6.10).

Докажем единственность решения. Пусть v_1 и v_2 – являются решениями задачи (6.10). Тогда обобщенная функция $v = v_1 - v_2$ является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - a^2 \Delta v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ \operatorname{supp} v(x,t) \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty), \\ v \in S'(\mathbb{R}^{n+1}). \end{cases}$$

Применяя преобразование Фурье по переменной x получим, что

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{v}(k,t)}{\partial t} + a^2|k|^2\hat{v}(k,t) = 0, \quad (k,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ \operatorname{supp} \hat{v}(k,t) \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty), \\ \hat{v} \in S'(\mathbb{R}^{n+1}), \end{cases}$$

где $\hat{v}(k,t) = F_{x\to k}[v(x,t)]$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $h(k,t) = \hat{v}(k,t)e^{ta^2|k|^2}$. Легко видеть, что $h \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\operatorname{supp} h \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$. Подставляя $\hat{v}(k,t) = e^{-ta^2|k|^2}h(k,t)$ в уравнение

$$\frac{\partial \hat{v}(k,t)}{\partial t} + a^2|k|^2\hat{v}(k,t) = 0, \quad (k,t) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

получим, что

$$\frac{\partial h(k,t)}{\partial t} = 0, \quad (k,t) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{6.12}$$

Так же как и при доказательстве теоремы 1.38 (общий вид решения уравнения $y' = 0$ в D') из (6.12) (с учетом того, что $h = 0$ при $t < 0$) можно получить, что $h \equiv 0$ как элемент $D'(\mathbb{R}^{n+1})$. Отсюда следует, что $\hat{v} \equiv 0$ как элемент $S'(\mathbb{R}^{n+1})$. Наконец, из теоремы 4.15 (обратное преобразование Фурье на S') следует, что $v \equiv 0$. □

Теорема 6.37. *Пусть* $\forall\ t > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n\ E(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$, *где* $n \in \mathbb{N}$.

Тогда

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} - a^2\Delta E(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty).$$

Доказательство. Следует из вывода формулы для фундаментального решения уравнения теплопроводности (см. теорему 5.14). □

Теорема 6.38 (Предел фундаментального решения уравнения теплопроводности при $t \to +0$)**.** *Пусть*

- $\forall\ t > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n\ E(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $\mathcal{E}(\cdot,t)$ *– семейство регулярных обобщенных функций с ядром* $E(\cdot,t)$, *зависящим от параметра* $t > 0$.

Тогда

$$\mathcal{E}(x,t) \xrightarrow[t\to+0]{D'(\mathbb{R}^n)} \delta(x).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}_1(\cdot,t)$ – семейство регулярных обобщенных функций с ядром

$$E(x_1,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x_1^2}{4a^2t}},\ x_1 \in \mathbb{R},$$

зависящим от параметра $t > 0$. Из теоремы 1.63 следует, что

$$\mathcal{E}_1(x_1,t) \xrightarrow[t\to+0]{D'(\mathbb{R})} \delta(x_1).$$

Заметим теперь, что обобщенная функция $\mathcal{E}$ может быть представлена в виде прямого произведения

$$\mathcal{E}(x,t) = \mathcal{E}_1(x_1,t) \cdot \mathcal{E}_1(x_2,t) \cdot \ldots \cdot \mathcal{E}_1(x_n,t).$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}(x,t) \xrightarrow[t\to+0]{D'(\mathbb{R}^n)} \delta(x_1)\cdot\delta(x_2)\cdot\ldots\cdot\delta(x_n) = \delta(x). \ \square$$

Теорема 6.39 (Теорема существования и единственности решения классической задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^{n+1}$). *Пусть*

- $F \in D(\mathbb{R}^{n+1})$, $U_0 \in D(\mathbb{R}^n)$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $\operatorname{supp} F(x,t) \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$.

Тогда решение классической задачи Коши для уравнения теплопроводности (6.9) *с дополнительным условием (на поведение решения* U *на бесконечности) вида*

- $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, *где* u *– регулярная обобщенная функция с ядром* U *при* $t \geqslant 0$ *и* 0 *при* $t<0$,

существует и единственно. При этом решение может быть записано в виде

$$U(x,t) = E * F(x,t) + E(\cdot,t) * U_0(x), \tag{6.13}$$

где ядро фундаментального решения $\mathcal{E}$ *оператора теплопроводности определено равенством*

$$E(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}},$$

свертка понимается в следующем смысле (в $\mathbb{R}^{n+1}$ *для первого слагаемого и в* $\mathbb{R}^n$ *для второго слагаемого в формуле* (6.13)*)*

$$E * F(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} E(y,\tau) F(x-y,t-\tau)\,dy\,d\tau, \quad E(\cdot,t) * U_0(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} E(y,t) U_0(x-y)\,dy$$

и начальное условие понимается в следующем смысле

$$U(x,t)\big|_{t=0} = \lim_{t\to+0} U(x,t).$$

Доказательство. Для обоснования существования свертки $E * F(x,t)$ перепишем ее следующим образом

$$E * F(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi\tau})^n} e^{-\frac{|y|^2}{4a^2\tau}} F(x-y,t-\tau)\,dy\,d\tau = \left[y = z\sqrt{\tau}\right] =$$

$$= \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi})^n} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4a^2}} F(x - z\sqrt{\tau}, t-\tau)\,dz\,d\tau.$$

В последнем интеграле подынтегральная функция непрерывна по переменным z и τ во всей области интегрирования и имеет компактный носитель. Следовательно, свертка $E*F(x,t)$ корректно определена. Аналогичным образом, можно убедиться, что функция $E*F(x,t)$ бесконечно дифференцируема по обеим переменным.

Заметим, что при $t>0$ функция $E(x,t)$ является гладкой по переменной x. Отсюда легко следует, что свертка $E(\cdot,t) * U_0(x)$ корректно определена и бесконечно дифференцируема по обеим переменным при $t>0$.

Введем обозначения

$$U_1(x,t) = E * F(x,t), \quad U_2(x,t) = E(\cdot,t) * U_0(x).$$

Из теоремы 5.9 следует, что
$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right] U_1(x,t) = F(x,t).$$
Из теоремы 6.37 и свойств свертки следует, что при $t > 0$
$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right] U_2(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} U_0(y)\left[\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_x\right] E(x-y,t)\,dy = 0.$$
Из условий $\operatorname{supp} E(x,t) \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$ и $\operatorname{supp} F(x,t) \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$ следует, что
$$\lim_{t\to+0} U_1(x,t) = \lim_{t\to+0}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(y,\tau)F(x-y,t-\tau)\,dy\,d\tau = \int\limits_0^0\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(y,\tau)F(x-y,t-\tau)\,dy\,d\tau = 0.$$
Из теоремы 6.38 следует, что
$$\lim_{t\to+0} U_2(x,t) = \lim_{t\to+0}\big(\mathcal{E}(y,t), U_0(x-y)\big) = \big(\delta(y), U_0(x-y)\big) = U_0(x).$$
Собирая полученные результаты вместе, получим, что U является решением уравнения теплопроводности (6.9).

Единственность решения в указанном классе следует из теоремы 6.36. □

6.8. **Задача Коши для волнового уравнения во всем пространстве.**

Определение 6.40 (Классическая задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^{n+1}$). *Пусть*

- $F : \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $U_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *и* $U_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *– заданные функции, где* $n \in \mathbb{N}$*;*
- $a > 0$ *– заданная постоянная;*
- $U : \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *– функция, которую требуется определить.*

Тогда классической задачей Коши для волнового уравнения называют задачу вида
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} - a^2\Delta U(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty), \\ U(x,t)\big|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = U_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ U \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)). \end{cases} \tag{6.14}$$

Определение 6.41 (Обобщенная задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^{n+1}$). *Пусть*

- $f \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, $u_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$ *и* $u_1 \in S'(\mathbb{R}^n)$ *– заданные обобщенные функции, где* $n \in \mathbb{N}$*;*
- $\operatorname{supp} f(x,t) \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$*;*
- $a > 0$ *– заданная постоянная;*
- $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ *– обобщенная функция, которую требуется определить.*

Тогда обобщенной задачей Коши для волнового уравнения называют задачу вида
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2\Delta u(x,t) = f(x,t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ \operatorname{supp} u(x,t) \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty), \\ u \in S'(\mathbb{R}^{n+1}). \end{cases} \tag{6.15}$$

Теорема 6.42 (Теорема существования и единственности решения обобщенной задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^{n+1}$). *Пусть*

- $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $B_R = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ |x| < R\}$ *и* $T > 0$*;*

- $f \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, $u_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in S'(\mathbb{R}^n)$;
- $\operatorname{supp} f(x,t) \subset B_R \times [0,T]$, $\operatorname{supp} u_0(x) \subset B_R$, $\operatorname{supp} u_1(x) \subset B_R$.

Тогда решение обобщенной задачи Коши для волнового уравнения (6.15) *существует, единственно и может быть записано в виде*

$$u(x,t) = \Big(\mathcal{E}(y,\tau) * \big[f(y,\tau) + u_0(y)\delta'(\tau) + u_1(y)\delta(\tau)\big]\Big)(x,t),$$

где $\mathcal{E}$ – фундаментальное решение волнового оператора, удовлетворяющее условию

$$\operatorname{supp} \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty).$$

Доказательство. Доказательство практически полностью повторяет доказательство теоремы 6.36 (самостоятельно). □

Определение 6.43 (Запаздывающий потенциал)**.** *Пусть*

- *$\mathcal{E}$ – фундаментальное решение волнового оператора, удовлетворяющее принципу причинности* $\operatorname{supp} \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$, *где $n \in \mathbb{N}$;*
- $\rho \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, $\operatorname{supp} \rho \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$;
- $\operatorname{supp} \rho$ *– ограничен.*

Тогда обобщенную функцию

$$u(x,t) = \mathcal{E} * \rho(x,t)$$

называют запаздывающим потенциалом с плотностью ρ.

Теорема 6.44 (Теорема существования и единственности решения классической задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^{1+1}$)**.** *Пусть*

- $F \in D(\mathbb{R}^{1+1})$, $U_0 \in D(\mathbb{R})$, $U_1 \in D(\mathbb{R})$;
- $\operatorname{supp} F(x,t) \subset \mathbb{R} \times [0,+\infty)$.

Тогда решение классической задачи Коши для волнового уравнения (6.14) *при $n = 1$ существует и единственно. При этом решение при $t \geqslant 0$ выражается формулой Даламбера*

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left[U_0(x+at) + U_0(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} U_1(y)\,dy + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)} F(y,\tau)\,dy\,d\tau.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы, воспользуемся результатом теоремы 6.42 при $n = 1$. Из теоремы 5.16 следует, что фундаментальное решение волнового оператора имеет вид

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2a}\,\theta(at - |x|).$$

Пусть u_0 – регулярная обобщенная функция из класса $D'(\mathbb{R})$ с ядром U_0, u_1 – регулярная обобщенная функция из класса $D'(\mathbb{R})$ с ядром U_1, f – регулярная функция из класса $D'(\mathbb{R}^{1+1})$ с ядром F. Введем следующие обозначения

$$v_0(x,t) = \Big(\mathcal{E}(y,\tau) * u_0(y)\delta'(\tau)\Big)(x,t),\ \ v_1(x,t) = \Big(\mathcal{E}(y,\tau) * u_1(y)\delta(\tau)\Big)(x,t),\ \ v_2(x,t) = \mathcal{E} * f(x,t).$$

Легко видеть, что

$$v_1(x,t) = \Big(\mathcal{E}(y,\tau) * u_1(y)\delta(\tau)\Big)(x,t) = \Big(\mathcal{E}(y,t) *_y u_1(y)\Big)(x),$$

где $*_y$ – обозначает свертку по переменной y. Учитывая, что $\mathcal{E}(y,t)$ и $u_1(y)$ – регулярные обобщенные функции, получим, что v_1 – регулярная обобщенная функция с ядром

$$V_1(x,t) = \Big(E(y,t) *_y U_1(y)\Big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} E(x-y,t)U_1(y)\,dy = \frac{1}{2a}\int\limits_{|x-y|<at} U_1(y)\,dy = \frac{\theta(t)}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} U_1(y)\,dy.$$

При этом ядро V_1 является классическим решением уравнения

$$\frac{\partial^2 V_1(x,t)}{\partial t^2} - a^2\Delta V_1(x,t) = 0$$

при $(x,t) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty)$.

Далее, из свойств свертки следует, что

$$v_0(x,t) = \Big(\mathcal{E}(y,\tau) * u_0(y)\delta'(\tau)\Big)(x,t) = \Big(\mathcal{E}(y,\tau) * u_0(y)\delta(\tau)\Big)'_t(x,t) = \Big(\mathcal{E}(y,t) *_y u_0(y)\Big)'_t(x).$$

Учитывая, что $\Big(\mathcal{E}(y,t)*_y u_0(y)\Big)(x)$ – регулярная обобщенная функция с непрерывным и кусочно-гладким ядром (при $t=0$ данная функция непрерывна, а ее производная по t, вообще говоря, нет), производную по t можно понимать в классическом смысле. Следовательно, v_0 – регулярная обобщенная функция с ядром

$$V_0(x,t) = \Big(E(y,t) *_y U_0(y)\Big)'_t(x) = \frac{\theta(t)}{2a}\left(\int\limits_{x-at}^{x+at} U_0(y)\,dy\right)'_t = \frac{\theta(t)}{2}\left[U_0(x+at) + U_0(x-at)\right].$$

При этом ядро V_0 является классическим решением уравнения

$$\frac{\partial^2 V_0(x,t)}{\partial t^2} - a^2\Delta V_0(x,t) = 0$$

при $(x,t) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty)$.

Из теоремы 5.9 следует, что ядро V_2 обобщенной функции v_2 является классическим решением уравнения

$$\frac{\partial^2 V_2(x,t)}{\partial t^2} - a^2\Delta V_2(x,t) = F(x,t)$$

при $(x,t) \in \mathbb{R}^{1+1}$. Вместе с этим, легко видеть, что

$$V_2(x,t) = \big(\mathcal{E}(y,\tau), F(x-y,t-\tau)\big) = \big(\mathcal{E}(x-y,t-\tau), F(y,\tau)\big) = \frac{1}{2a}\iint\limits_{|x-y|<a(t-\tau)} F(y,\tau)\,dy\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{|x-y|<a(t-\tau)} F(y,\tau)\,dy\,d\tau = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)} F(y,\tau)\,dy\,d\tau.$$

Собирая полученные результаты вместе, получим, что функция

$$U(x,t) = V_0(x,t) + V_1(x,t) + V_2(x,t)$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} - a^2\Delta U(x,t) = F(x,t)$$

при $(x,t) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty)$.

Заметим, что

$$\lim_{t\to+0} U(x,t) = \lim_{t\to+0} V_0(x,t) + \lim_{t\to+0} V_1(x,t) + \lim_{t\to+0} V_2(x,t) = U_0(x) + 0 + 0,$$

$$\lim_{t\to+0} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \lim_{t\to+0} \frac{\partial V_0(x,t)}{\partial t} + \lim_{t\to+0} \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} + \lim_{t\to+0} \frac{\partial V_2(x,t)}{\partial t} = 0 + U_1(x) + 0.$$

Следовательно, U – удовлетворяет начальным условиям задачи (6.14).

Единственность решения задачи (6.14) оставим без доказательства. □

Теорема 6.45 (Теорема существования и единственности решения классической задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^{2+1}$)**.** *Пусть*

- $F \in D(\mathbb{R}^{2+1})$, $U_0 \in D(\mathbb{R}^2)$, $U_1 \in D(\mathbb{R}^2)$;
- $\operatorname{supp} F(x,t) \subset \mathbb{R}^2 \times [0,+\infty)$.

Тогда решение классической задачи Коши для волнового уравнения (6.14) *при* $n = 2$ *существует и единственно. При этом решение при* $t \geqslant 0$ *выражается формулой Пуассона*

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{|x-y|<at} \frac{U_0(y)\,dy}{\sqrt{a^2t^2 - |x-y|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{|x-y|<at} \frac{U_1(y)\,dy}{\sqrt{a^2t^2 - |x-y|^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^t \int\limits_{|x-y|<a(t-\tau)} \frac{F(y,\tau)\,dy\,d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-y|^2}}\ .$$

Доказательство. Без доказательства (доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 6.44). □

Теорема 6.46 (Теорема существования и единственности решения классической задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^{3+1}$)**.** *Пусть*

- $F \in D(\mathbb{R}^{3+1})$, $U_0 \in D(\mathbb{R}^3)$, $U_1 \in D^3(\mathbb{R})$;
- $\operatorname{supp} F(x,t) \subset \mathbb{R}^3 \times [0,+\infty)$.

Тогда решение классической задачи Коши для волнового уравнения (6.14) *при* $n = 3$ *существует и единственно. При этом решение при* $t \geqslant 0$ *выражается формулой Кирхгофа*

$$U(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{|x-y|=at} U_0(y)\,dS\right] + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|x-y|=at} U_1(y)\,dS\ +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{|x-y|<at} F\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)\frac{dy}{|x-y|}\ .$$

Доказательство. Без доказательства (доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 6.44). □

6.9. **Задача Коши для уравнения Шредингера во всем пространстве.**

Определение 6.47 (Обобщенная задача Коши для уравнения Шредингера в $\mathbb{R}^{n+1}$)**.** *Пусть*

- $f \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ *и* $u_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$ *– заданные обобщенные функции, где* $n \in \mathbb{N}$;
- $\operatorname{supp} f(x,t) \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$;
- $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ *– обобщенная функция, которую требуется определить.*

Тогда обобщенной задачей Коши для уравнения Шредингера называют задачу вида

$$\begin{cases} i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = f(x,t) + iu_0(x)\delta(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ \operatorname{supp} u(x,t) \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty), \\ u \in S'(\mathbb{R}^{n+1}). \end{cases} \tag{6.16}$$

Теорема 6.48 (Теорема существования и единственности решения обобщенной задачи Коши для уравнения Шредингера в $\mathbb{R}^{n+1}$)**.** *Пусть*

- $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $B_R = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ |x| < R\}$ *и* $T > 0$*;*
- $f \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, $u_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$*;*
- $\operatorname{supp} f(x,t) \subset B_R \times [0,T]$, $\operatorname{supp} u_0(x) \subset B_R$.

Тогда решение обобщенной задачи Коши для уравнения Шредингера (6.16) *существует, единственно и может быть записано в виде*

$$u(x,t) = \Big(\mathcal{E}(y,\tau) * \big[f(y,\tau) + iu_0(y)\delta(\tau)\big]\Big)(x,t),$$

где $\mathcal{E}$ *– фундаментальное решение оператора Шредингера, удовлетворяющее условию*

$$\operatorname{supp} \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n \times [0,+\infty).$$

Доказательство. Самостоятельно (доказательство практически полностью повторяет доказательство теоремы 6.36). □

6.10. **Физическая интерпретация полученных результатов.**

Теорема 6.49 (Скорость распространения возмущения для уравнений математической физики зависящих от времени)**.** *Скорость распространения возмущения от точечного источника*

(1) *для уравнения теплопроводности при* $n \in \mathbb{N}$ *равна бесконечности;*
(2) *для волнового уравнения при* $n \in \mathbb{N}$ *равна* a*;*
(3) *для уравнения Шредингера при* $n \in \mathbb{N}$ *равна бесконечности.*

Доказательство. Следует из явного вида фундаментального решения (с носителем сосредоточенным в области $t \geqslant 0$) для упомянутых уравнений. □

Определение 6.50 (Передний фронт волны)**.** *Пусть*

- $u(x,t)$ *– классическое решение задачи Коши для однородного уравнения (тип: параболическое, гиперболическое или Шредингера) в* $\mathbb{R}^{n+1}$*, где* $n \in \mathbb{N}$*;*
- $u(x,0)$ *(и* $\partial_t u(x,0)$ *для гиперболического уравнения) – имеют компактный носитель (по переменной* x*).*

Тогда говорят, что $S \subset \mathbb{R}^n$ *– передний фронт волны и в момент времени* $T > 0$*, если существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

(1) *для любых* $x \in S$ *и* $t \leqslant T$ *верно, что* $u(x,t) = 0$*;*
(2) *для любых* $x \in S$ *и* $t \in (T, T+\varepsilon)$ *верно, что* $u(x,t) \neq 0$.

Определение 6.51 (Задний фронт волны)**.** *Пусть*

- $u(x,t)$ *– классическое решение задачи Коши для однородного уравнения (тип: параболическое, гиперболическое или Шредингера) в* $\mathbb{R}^{n+1}$*, где* $n \in \mathbb{N}$*;*
- $u(x,0)$ *(и* $\partial_t u(x,0)$ *для гиперболического уравнения) – имеют компактный носитель (по переменной* x*).*

Тогда говорят, что $S \subset \mathbb{R}^n$ *– задний фронт волны и в момент времени* $T > 0$*, если существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

(1) *для любых* $x \in S$ *и* $t \in (T - \varepsilon, T)$ *верно, что* $u(x,t) \neq 0$*;*
(2) *для любых* $x \in S$ *и* $t \geqslant T$ *верно, что* $u(x,t) = 0$*.*

Теорема 6.52 (Передний и задний фронты волны для уравнений математической физики зависящих от времени)**.**

(1) *Для уравнения теплопроводности при* $n \in \mathbb{N}$ *передний и задний фронты волны отсутствуют;*
(2) *Для волнового уравнения при* $n \in \mathbb{N}$ *существует передний фронт волны;*
(3) *Для волнового уравнения при* $n = 1, 2$ *(и всех четных* n*) задний фронт волны отсутствует;*
(4) *Для волнового уравнения при* $n = 3$ *(и всех нечетных* n*, кроме* $n = 1$*) существует задний фронт волны;*
(5) *Для уравнения Шредингера при* $n \in \mathbb{N}$ *передний и задний фронты волны отсутствуют;*

Доказательство. Следует из явного вида фундаментального решения (с носителем сосредоточенным в области $t \geqslant 0$) для упомянутых уравнений. □

7. Аналитическая теория дифференциальных уравнений

7.1. Поведение решений дифференциального уравнения в области регулярности его коэффициентов.

Теорема 7.1 (Существование и единственность решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения в области регулярности его коэффициентов)**.** *Пусть*

- *D – односвязная область в $\mathbb{C}$;*
- *$F \in \mathcal{H}(D)$;*
- *$z_0 \in D$ и $w_0 \in \mathbb{C}$.*

Тогда решение задачи Коши

$$W'(z) = F(z)W(z), \quad W(z_0) = w_0 \tag{7.1}$$

существует, единственно и является регулярной функцией в области D.

Доказательство. Доказательство проведем для случая, когда D – выпуклая область.

Докажем, что решение существует. Для этого рассмотрим рекуррентную последовательность

$$W_p(z) = \int\limits_{z_0}^{z} F(\zeta)W_{p-1}(\zeta)\, d\zeta + w_0, \tag{7.2}$$

где $p \in \mathbb{N}$, $W_0(z) = w_0$ и $z \in D$. Интеграл в формуле (7.2) не зависит от выбора контура интегрирования и, следовательно, в качестве контура интегрирования можно выбрать прямолинейный отрезок, соединяющий точки z и z_0. Легко видеть, что

$$W_1(z) = \int\limits_{z_0}^{z} F(\zeta)w_0\, d\zeta + w_0$$

и, следовательно, $W_1 \in \mathcal{H}(D)$. По индукции получим, что

$$\forall\ p \in \mathbb{N} \quad W_p \in \mathcal{H}(D).$$

Докажем теперь, что существует предел $\lim\limits_{p\to\infty} W_p(z)$. Для этого заметим, что

$$W_p(z) = W_0(z) + \sum_{n=1}^{p} \Big[W_n(z) - W_{n-1}(z)\Big]$$

и докажем, что ряд

$$W_0(z) + \sum_{n=1}^{p} \Big[W_n(z) - W_{n-1}(z)\Big] \tag{7.3}$$

сходится.

Пусть K – произвольный выпуклый компакт лежащий внутри области D и содержащий точку z_0. Тогда существует конечный максимум

$$M = \max_{z\in K} |F(z)|.$$

По индукции легко получить, что

$$\forall\ z \in K \quad |W_1(z) - W_0(z)| \leqslant \int\limits_{z_0}^{z} |F(\zeta)||w_0|\, dl \leqslant M|w_0| \int\limits_{z_0}^{z} dl = M|z - z_0||w_0|,$$

$$|W_2(z)-W_1(z)| \leqslant \int\limits_{z_0}^{z} |F(\zeta)||W_1(\zeta)-W_0(\zeta)|\,dl \leqslant M^2|w_0| \int\limits_{z_0}^{z} |z-z_0|\,dl = \frac{1}{2}M^2|z-z_0|^2|w_0|,$$

$$\forall\, n\in\mathbb{N} \quad |W_n(z)-W_{n-1}(z)| \leqslant \int\limits_{z_0}^{z} |F(\zeta)||W_{n-1}(\zeta)-W_{n-2}(\zeta)|\,dl \leqslant \frac{1}{n!}M^n|z-z_0|^n|w_0|.$$

Отсюда,

$$\forall\, z\in K \quad \left| W_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[W_n(z)-W_{n-1}(z)\Big]\right| \leqslant |w_0|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}M^n|z-z_0|^n = |w_0|e^{M|z-z_0|} < \infty.$$

Следовательно, ряд (7.3) сходится равномерно на K. Обозначим сумму ряда (7.3) через W_* и заметим, что

$$W_*(z) = \lim_{p\to\infty} W_p(z), \tag{7.4}$$

причем последний предел достигается равномерно на любом выпуклом компакте $K\subset D$. Из теоремы Вейерштрасса и произвольности выбора компакта K следует, что $W_*\in\mathcal{H}(D)$.

Докажем теперь, что W_* – является решением задачи Коши (7.1). Из равномерной сходимости предела (7.4) следует, что в равенстве (7.2) возможно перейти к пределу под знаком интеграла. Отсюда получим, что

$$W_*(z) = \int\limits_{z_0}^{z} F(\zeta)W_*(\zeta)\,d\zeta + w_0. \tag{7.5}$$

Дифференцируя равенство (7.5) по z получим, что

$$W_*'(z) = F(z)W_*(z).$$

Полагая $z=z_0$ в равенстве (7.5) получим, что $W_*(z_0)=w_0$. Таким образом, W_* – решение задачи Коши (7.1).

Докажем теперь, что решение W задачи Коши (7.1) единственно. Для этого достаточно доказать, что ряд Тейлора решения W однозначно определяется задачей Коши (7.1).

Из регулярности решения W в окрестности точки z_0 следует, что решение W может быть разложено в сходящийся ряд Тейлора вида

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n. \tag{7.6}$$

Аналогично,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z-z_0)^n. \tag{7.7}$$

Подставляя ряды (7.6) и (7.7) в уравнение (7.1) получим, что

$$W'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1} = \Big[p=n-1\Big] = \sum_{p=0}^{\infty}(p+1)c_{p+1}(z-z_0)^p,$$

$$F(z)W(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\sum_{k=0}^{\infty}f_k(z-z_0)^k=\Big[n=n,\ p=n+k\Big]=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=n}^{\infty}c_nf_{p-n}(z-z_0)^p=$$
$$=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{p}c_nf_{p-n}(z-z_0)^p=\sum_{p=0}^{\infty}(z-z_0)^p\sum_{n=0}^{p}c_nf_{p-n},$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)c_{p+1}(z-z_0)^p=\sum_{p=0}^{\infty}(z-z_0)^p\sum_{n=0}^{p}c_nf_{p-n}. \tag{7.8}$$

Из начального условия задачи Коши (7.1) получим, что

$$c_0=w_0. \tag{7.9}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(z-z_0)$ в равенстве (7.8), получим, что

$$\forall\ p\in\mathbb{Z}_+\quad c_{p+1}=\frac{1}{p+1}\sum_{n=0}^{p}c_nf_{p-n}. \tag{7.10}$$

Заметим теперь, что уравнение (7.10) является рекуррентным. При $p=0$ получим, что c_1 выражается через c_0, при $p=1$ получим, что c_2 выражается через c_0 и c_1 и т.д. Таким образом, из (7.9) и (7.10) следует, что все коэффициенты из ряда Тейлора (7.6) однозначно выражаются через w_0 (коэффициент в начальном условии задачи Коши (7.1)) и через коэффициенты ряда Тейлора (7.7) функции F. Другими словами, решение задачи Коши (7.1)) единственно. $\square$

Теорема 7.2 (Существование и единственность решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений в области регулярности ее коэффициентов)**.** *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- $n\in\mathbb{N}$*;*
- F *– матрица* $n\times n$*, каждый элемент которой является регулярной функцией в* D*;*
- $z_0\in D$ *и* $\overrightarrow{w}_0\in\mathbb{C}^n$*.*

Тогда решение задачи Коши

$$\overrightarrow{W}'(z)=F(z)\overrightarrow{W}(z),\quad W(z_0)=w_0$$

существует, единственно и является регулярной функцией в области D*.*

Доказательство. Самостоятельно (практически дословно повторяет доказательство теоремы 7.1). $\square$

Теорема 7.3 (Существование и единственность решения задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений в области регулярности ее коэффициентов)**.** *Пусть*

- $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_1>0$, ..., $\varepsilon_n>0$, *где* $n\in\mathbb{N}$*;*
- $z_0\in D$, $w_1^0\in\mathbb{C}$, $w_2^0\in\mathbb{C}$, ..., $w_n^0\in\mathbb{C}$*;*
- $\overrightarrow{F}(z,W_1,\ldots,W_n)$ *– вектор длины* n*, каждый элемент которого является регулярной функцией в круге* $|z-z_0|<\varepsilon_0$ *по переменной* z *и в круге* $|W_p-w_p^0|<\varepsilon_p$ *по переменной* W_p *для любого* $p=1,\ldots,n$*;*
- $\overrightarrow{w}^0=\begin{pmatrix}w_1^0\\ \vdots\\ w_n^0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{W}=\begin{pmatrix}W_1\\ \vdots\\ W_n\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F}(z,\overrightarrow{W})\equiv\overrightarrow{F}(z,W_1,\ldots,W_n)$.

Тогда существует $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ такое, что решение задачи Коши

$$\overrightarrow{W}'(z) = \overrightarrow{F}(z, \overrightarrow{W}(z)), \quad \overrightarrow{W}(z)\Big|_{z=z_0} = \overrightarrow{w}^0$$

существует, единственно и является регулярной функцией в круге $|z - z_0| < \varepsilon$.

Доказательство. Без доказательства. □

Теорема 7.4 (Контрпример к теореме о существовании и единственности решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения)**.** *Существуют функция $F(z, w)$ регулярная по каждой из переменных во всей комплексной плоскости, а также точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $w_0 \in \mathbb{C}$ такие, что решение W задачи Коши*

$$W'(z) = F(z, W), \quad W(z_0) = w_0$$

не может быть аналитически продолжено во всю комплексную плоскость.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши

$$W'(z) = W^2, \quad W(0) = w_0, \tag{7.11}$$

где $w_0 \in \mathbb{C}$. Решение задачи Коши (7.11) имеет вид

$$W(z) = \frac{1}{\frac{1}{w_0} - z}. \tag{7.12}$$

Легко видеть, что решение (7.12) имеет полюс первого порядка в точке $\frac{1}{w_0}$. Более того, при увеличении по модулю начального условия w_0 круг, в котором решение задачи Коши (7.11) существует и единственно, сжимается к началу координат (т. е. к точке, в которой задано начальное условие). □

7.2. Поведение решений линейного дифференциального уравнения в окрестности изолированной особой точки его коэффициентов.

Определение 7.5 (Матрица монодромии)**.** *Пусть*

- *$D = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$, где $z_0 \in \mathbb{C}$ и $\varepsilon > 0$;*
- *$F \in \mathcal{H}(D, M_n)$ (другими словами, F – матрица $n \times n$, каждый элемент которой является регулярной функцией в D);*
- *$z_1 \in D$ и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что $U = \{z \mid |z - z_1| < \varepsilon_1\} \subset D$;*
- *$\overrightarrow{W_p}$ – решение задачи Коши*

  $$\overrightarrow{W_p}'(z) = F(z)\overrightarrow{W_p}(z), \quad \overrightarrow{W_p}(z_1) = \underbrace{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^t}_{1 \text{ на } p\text{-ом месте}}$$

  в области U, где $p = 1, 2, \ldots, n$;
- *$\gamma = \{z \mid |z - z_0| = |z_1 - z_0|\}$ – контур, ориентированный против часовой стрелки;*
- *$\overrightarrow{W_p^*}$ – результат аналитического продолжения решения $\overrightarrow{W_p}$ при однократном обходе контура γ в область U.*

Тогда (числовую) матрицу $M = \{m_{kp}\}_{k,p=1}^n$, связывающую базисы $\{\overrightarrow{W_p}\}_{p=1}^n$ и $\{\overrightarrow{W_p^*}\}_{p=1}^n$ в пространстве решений уравнения

$$\overrightarrow{W}' = F\overrightarrow{W} \tag{7.13}$$

соотношением вида

$$\overrightarrow{W_p^*} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{W_k} m_{kp},$$

называют матрицей монодромии для уравнения (7.13) *в окрестности изолированной особой точки* z_0.

Теорема 7.6 (Поведение решения системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки (случай собственного вектора матрицы монодромии))**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$, *где* $z_0 \in \mathbb{C}$ *и* $\varepsilon > 0$*;*
- $F \in \mathcal{H}(D, M_n)$
- M *– матрица монодромии для уравнения*

$$\overrightarrow{W}' = F\overrightarrow{W} \tag{7.14}$$

- e *– собственный вектор матрицы* M *и* λ *– собственное число отвечающее собственному вектору* e *(т.е.* $Me = \lambda e$*).*

Тогда

(1) *в области* D *существует (вообще говоря, многозначное) решение* W *уравнения* (7.14) *вида*

$$\overrightarrow{W}(z) = (z - z_0)^\rho \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{c}_k (z - z_0)^k,$$

где ρ *– любое решение уравнения*

$$e^{2\pi i\rho} = \lambda;$$

(2) $\overrightarrow{W}$ *называют собственным решением уравнения* (7.14)*, отвечающем собственному числу* λ *матрицы монодромии* M*.*

Доказательство. Пусть собственный вектор e в координатном представлении имеет вид $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)^t$. Рассмотрим решение уравнения (7.14) вида

$$\overrightarrow{W} = \sum_{p=1}^{n} e_p \overrightarrow{W_p}.$$

Аналитическое продолжение решения $\overrightarrow{W}$ вокруг точки z_0 (вдоль контура γ согласно определению 7.5) имеет вид

$$\overrightarrow{W^*} = \sum_{p=1}^{n} e_p \overrightarrow{W_p^*} = \sum_{p=1}^{n} e_p \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{W_k} m_{kp} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{W_k} \sum_{p=1}^{n} m_{kp} e_p = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{W_k} \lambda e_k = \lambda \overrightarrow{W}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\overrightarrow{\omega}(z) = (z - z_0)^{-\rho} \overrightarrow{W}. \tag{7.15}$$

Аналитическое продолжение функции $\overrightarrow{\omega}$ вокруг точки z_0 (вдоль контура γ согласно определению 7.5) имеет вид

$$\overrightarrow{\omega^*} = e^{-2\pi i\rho} (z - z_0)^{-\rho} \overrightarrow{W^*} = e^{-2\pi i\rho} (z - z_0)^{-\rho} \lambda \overrightarrow{W} = (z - z_0)^{-\rho} \overrightarrow{W} = \overrightarrow{\omega}.$$

Другими словами, функция $\overrightarrow{\omega}$ регулярна в области D (точнее, допускает выделение регулярной ветви) и, следовательно, может быть разложена в ряд Лорана вида

$$\overrightarrow{\omega}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{c}_k (z-z_0)^k, \tag{7.16}$$

сходящийся в области D.

Подставляя разложение (7.16) в представление (7.15), получим требуемое утверждение. □

Теорема 7.7 (Поведение решения системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки (случай присоединенного вектора матрицы монодромии))**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid 0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$, *где* $z_0 \in \mathbb{C}$ *и* $\varepsilon > 0$;
- $F \in \mathcal{H}(D, M_n)$
- M *– матрица монодромии для уравнения*
$$\overrightarrow{W}' = F\overrightarrow{W} \tag{7.17}$$
- e *и* g *– собственный и присоединенный вектора матрицы* M*, отвечающие собственному числу* λ *(т.е.* $(M-\lambda)e = 0$ *и* $(M-\lambda)g = e$*).*

Тогда

(1) *в области* D *существует (вообще говоря, многозначное) решение* V *уравнения* (7.17) *вида*
$$\overrightarrow{V}(z) = (z-z_0)^\rho \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{d}_k (z-z_0)^k + A\overrightarrow{W}(z)\ln(z-z_0),$$
где $\overrightarrow{W}$ *– собственное решениее уравнения* (7.17), $A \neq 0$ *и* ρ *– любое решение уравнения*
$$e^{2\pi i\rho} = \lambda;$$

(2) $\overrightarrow{V}$ *называют присоединенным решением уравнения* (7.17)*, отвечающем собственному числу* λ *матрицы монодромии* M*.*

Доказательство. Пусть e и g в координатном представлении имеют вид $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)^t$ и $u = (g_1, g_2, \ldots, g_n)^t$. Рассмотрим решения уравнения (7.14) вида

$$\overrightarrow{W} = \sum_{p=1}^{n} e_p \overrightarrow{W}_p, \quad \overrightarrow{V} = \sum_{p=1}^{n} g_p \overrightarrow{W}_p.$$

Аналитическое продолжение решений $\overrightarrow{W}$ и $\overrightarrow{V}$ вокруг точки z_0 (вдоль контура γ согласно определению 7.5) имеет вид

$$\overrightarrow{W^*} = \lambda\overrightarrow{W},$$
$$\overrightarrow{V^*} = \sum_{p=1}^{n} g_p \overrightarrow{W^*_p} = \sum_{p=1}^{n} g_p \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{W_k} m_{kp} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{W_k} \sum_{p=1}^{n} m_{kp} g_p = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{W_k}(\lambda g_k + e_k) = \lambda\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}.$$

Будем искать решение $\overrightarrow{V}$ в виде

$$\overrightarrow{V}(z) = (z-z_0)^\rho \overrightarrow{v} + A\overrightarrow{W}(z)\ln(z-z_0). \tag{7.18}$$

Другим словами, рассмотрим вспомогательную функцию

$$\overrightarrow{v}(z) = (z-z_0)^{-\rho}\overrightarrow{V} - A\,\overrightarrow{\omega}(z)\ln(z-z_0),$$

где $\overrightarrow{W} = (z-z_0)^\rho \overrightarrow{\omega}(z)$.

Аналитическое продолжение функции $\overrightarrow{v}$ вокруг точки z_0 (вдоль контура γ согласно определению 7.5) имеет вид

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v^*} &= e^{-2\pi i\rho}(z-z_0)^{-\rho}(\lambda\overrightarrow{V}+\overrightarrow{W}) - A\,\overrightarrow{\omega}(z)(\ln(z-z_0)+2\pi i) = \\ &= (z-z_0)^{-\rho}\overrightarrow{V} + e^{-2\pi i\rho}(z-z_0)^{-\rho}\overrightarrow{W} - 2\pi i A\,\overrightarrow{\omega}(z) - A\,\overrightarrow{\omega}(z)\ln(z-z_0) = \\ &= (z-z_0)^{-\rho}\overrightarrow{V} + \left(\frac{1}{\lambda} - 2\pi i A\right)\overrightarrow{\omega}(z) - A\,\overrightarrow{\omega}(z)\ln(z-z_0) = \\ &= \overrightarrow{v} + \left(\frac{1}{\lambda} - 2\pi i A\right)\overrightarrow{\omega}(z).\end{aligned}$$

Таким образом, при $A = \frac{1}{2\pi i\lambda}$ верно, что $\overrightarrow{v^*} = \overrightarrow{v}$. Другими словами, функция $\overrightarrow{v}$ регулярна в области D (точнее, допускает выделение регулярной ветви) и, следовательно, может быть разложена в ряд Лорана (сходящийся в области D) вида

$$\overrightarrow{v}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{d}_k (z-z_0)^k. \tag{7.19}$$

Подставляя разложение (7.19) в представление (7.18), получим требуемое утверждение. □

7.3. **Теорема Фукса.**

Теорема 7.8 (Поведение решения линейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности конечной особой точки)**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid 0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$, *где* $z_0 \in \mathbb{C}$ *и* $\varepsilon > 0$;
- $p \in \mathcal{H}(D)$, $q \in \mathcal{H}(D)$.

Тогда в области D уравнение

$$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0 \tag{7.20}$$

имеет два линейно-независимых решения (вообще говоря, многозначных) вида

$$\begin{aligned} W_1(z) &= (z-z_0)^{\rho_1}\omega_1(z), \\ W_2(z) &= (z-z_0)^{\rho_2}\omega_2(z) + A\,W_1(z)\ln(z-z_0), \end{aligned}$$

где $\rho_1 \in \mathbb{C}$, $\rho_2 \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}$, $\omega_1 \in \mathcal{H}(D)$ *и* $\omega_2 \in \mathcal{H}(D)$.

Доказательство. Пусть W – решение уравнения (7.20). Легко видеть, что вектор-функция

$$\overrightarrow{W}(z) = \begin{pmatrix} W(z) \\ W'(z) \end{pmatrix}$$

является решением системы линейных уравнений

$$\overrightarrow{W}'(z) = F(z)\overrightarrow{W}(z), \quad F(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(z) & -p(z) \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из теорем 7.6 и 7.7 следует необходимое утверждение. □

Определение 7.9 (Правильная особая точка линейного дифференциального уравнения второго порядка)**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid 0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$, *где* $z_0 \in \mathbb{C}$ *и* $\varepsilon > 0$;
- $p \in \mathcal{H}(D)$, $q \in \mathcal{H}(D)$;

- *в области D уравнение*
$$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0 \tag{7.21}$$
имеет два линейно-независимых решения (вообще говоря, многозначных) вида
$$\begin{aligned} W_1(z) &= (z-z_0)^{\rho_1}\omega_1(z), \\ W_2(z) &= (z-z_0)^{\rho_2}\omega_2(z) + A\,W_1(z)\ln(z-z_0), \end{aligned}$$
где $\rho_1 \in \mathbb{C}$, $\rho_2 \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}$, $\omega_1 \in \mathcal{H}(D)$ и $\omega_2 \in \mathcal{H}(D)$;
- *точка z_0 является полюсом или устранимой особой точкой для функций ω_1 и ω_2.*

Тогда точку $z_0 \in \mathbb{C}$ называют правильной особой точкой уравнения (7.21).

Теорема 7.10 (Теорема Фукса (случай конечной особой точки))**.** *Пусть*
- *$D = \{z \mid 0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$, где $z_0 \in \mathbb{C}$ и $\varepsilon > 0$;*
- *$p \in \mathcal{H}(D)$, $q \in \mathcal{H}(D)$.*

Тогда для того чтобы точка z_0 была правильной особой точкой уравнения
$$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0,$$
необходимо и достаточно выполнения двух следующих условий

(1) *z_0 – полюс 1-го порядка или устранимая особая точка функции p;*
(2) *z_0 – полюс не выше 2-го порядка или устранимая особая точка функции q.*

Доказательство. Необходимость ($\Longrightarrow$). Самостоятельно (рассмотреть случай без логарифма).
Достаточность ($\Longleftarrow$). Без доказательства. □

Определение 7.11 (Характеристические показатели в окрестности конечной правильной особой точки)**.** *Пусть*
- *функции p и q допускают разложения в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ в ряды Лорана вида*
$$p(z) = \frac{p_0}{z-z_0} + O(1), \quad q(z) = \frac{q_0}{(z-z_0)^2} + \frac{q_1}{z-z_0} + O(1).$$
- *ρ_1 и ρ_2 корни характеристического уравнения*
$$\rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0 = 0$$
такие, что $\operatorname{Re}\rho_1 \geqslant \operatorname{Re}\rho_2$.

Тогда числа ρ_1 и ρ_2 называют характеристическими показателями уравнения
$$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0$$
в окрестности правильной особой точки z_0.

Теорема 7.12 (Связь между характеристическими показателями и поведением решения в окрестности конечной правильной особой точки)**.** *Пусть ρ_1 и ρ_2 – характеристические показатели уравнения*
$$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0 \tag{7.22}$$
в окрестности правильной особой точки z_0. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) *Пусть $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$, тогда существует два решения уравнения (7.22) вида*
$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+\rho_1}, \quad W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^{n+\rho_2} \tag{7.23}$$
таких, что $c_0 \neq 0$ и $d_0 \neq 0$.

(2) *Пусть* $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, *тогда существует два решения уравнения* (7.22) *вида*

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+\rho_1}, \quad W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_0)^{n+\rho_2} + AW_1(z)\ln(z-z_0) \tag{7.24}$$

таких, что $c_0 \neq 0$ *и* $d_0 \neq 0$. *При этом постоянная* A *может оказаться равной нулю.*

(3) *Пусть* $\rho_1 = \rho_2$, *тогда существует два решения уравнения* (7.22) *вида* (7.24) *таких, что* $c_0 \neq 0$, $d_0 = 0$ *и* $A \neq 0$.

При этом ряды, указанные в (7.23) *и* (7.24), *сходятся в любом круге* $|z - z_0| < R$, *не содержащем других особых точек уравнения* (7.22).

Доказательство. Без доказательства. □

7.4. Поведение решений линейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности бесконечности.

Теорема 7.13 (Преобразование линейного дифференциального уравнения второго порядка, заданного в окрестности бесконечности, в линейное дифференциальное уравнения второго порядка, заданное в окрестности нуля)**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid |z| > R\}$, $U = \{t \mid 0 < |t| < R^{-1}\}$, *где* $R > 0$;
- $p \in \mathcal{H}(D)$, $q \in \mathcal{H}(D)$;
- $\forall\ z \in D\ W(z) = V(1/z)$.

Тогда для того чтобы $W(z)$ *было решением уравнения*

$$W''(z) + p(z)W'(z) + q(z)W(z) = 0 \tag{7.25}$$

в области D, *необходимо и достаточно, чтобы* $V(t)$ *было решением уравнения*

$$V''(t) + \frac{2t - p(1/t)}{t^2} V'(t) + \frac{q(1/t)}{t^4} V(t) = 0 \tag{7.26}$$

в области U.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\frac{dW(z)}{dz} = \frac{dV(1/z)}{dz} = V'(1/z)\,\frac{d(1/z)}{dz} = -\frac{1}{z^2}V'(1/z) = -t^2V'(t)\Big|_{t=1/z},$$

$$\frac{d^2W(z)}{dz^2} = -\left(\frac{d}{dz}\frac{1}{z^2}V'(1/z)\right) = -\frac{d(1/z^2)}{dz}V'(1/z) - \frac{1}{z^2}\frac{dV'(1/z)}{dz} = \frac{2}{z^3}V'(1/z) + \frac{1}{z^4}V''(1/z) =$$
$$= t^4V''(t) + 2t^3V'(t)\Big|_{t=1/z}.$$

Отсюда следует, что замена переменных $z = 1/t$ в уравнении (7.25) на функцию W приводит к уравнению (7.26) на функцию V. □

Теорема 7.14 (Поведение решения линейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности бесконечности)**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid |z| > R\}$, *где* $R \geqslant 0$;
- $p \in \mathcal{H}(D)$, $q \in \mathcal{H}(D)$.

Тогда в области D *уравнение*

$$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0$$

имеет два линейно-независимых решения (вообще говоря, многозначных) вида

$$W_1(z) = z^{\rho_1}\omega_1(z),$$
$$W_2(z) = z^{\rho_2}\omega_2(z) + A\,W_1(z)\ln z,$$

где $\rho_1 \in \mathbb{C}$, $\rho_2 \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}$, $\omega_1 \in \mathcal{H}(D)$ *и* $\omega_2 \in \mathcal{H}(D)$.

Доказательство. Следует из теорем 7.8 и 7.13. □

Определение 7.15 (Бесконечно удаленная правильная особая точка линейного дифференциального уравнения второго порядка)**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid |z| > R\}$, *где* $R \geqslant 0$;
- $p \in \mathcal{H}(D)$, $q \in \mathcal{H}(D)$;
- *в области* D *уравнение*

$$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0 \tag{7.27}$$

  имеет два линейно-независимых решения (вообще говоря, многозначных) вида

$$W_1(z) = z^{\rho_1}\omega_1(z),$$
$$W_2(z) = z^{\rho_2}\omega_2(z) + A\,W_1(z)\ln z,$$

  где $\rho_1 \in \mathbb{C}$, $\rho_2 \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}$, $\omega_1 \in \mathcal{H}(D)$ *и* $\omega_2 \in \mathcal{H}(D)$;
- *бесконечно удаленная точка является полюсом или устранимой особой точкой для функций* ω_1 *и* ω_2.

Тогда бесконечно удаленную точку называют правильной особой точкой уравнения (7.27).

Теорема 7.16 (Теорема Фукса (случай бесконечно удаленной особой точки))**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid |z| > R\}$, *где* $R \geqslant 0$;
- $p \in \mathcal{H}(D)$, $q \in \mathcal{H}(D)$.

Тогда для того чтобы бесконечно удаленная точка была правильной особой точкой уравнения

$$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0,$$

необходимо и достаточно выполнения двух следующих условий

(1) *бесконечность является нулем не ниже 1-го порядка функции* p;
(2) *бесконечность является нулем не ниже 2-го порядка функции* q.

Доказательство. Следует из теорем 7.10 и 7.13. □

Определение 7.17 (Характеристические показатели в окрестности бесконечно удаленной правильной особой точки)**.** *Пусть*

- *функции* p *и* q *допускают разложения в окрестности бесконечно удаленной точки в ряды Лорана вида*

$$p(z) = \frac{p_0}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad q(z) = \frac{q_0}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

- ρ_1 *и* ρ_2 *корни характеристического уравнения*

$$\rho(\rho - 1) + p_0\rho + q_0 = 0$$

  такие, что $\operatorname{Re}\rho_1 \leqslant \operatorname{Re}\rho_2$.

Тогда числа ρ_1 и ρ_2 называют характеристическими показателями уравнения

$$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0$$

в окрестности бесконечно удаленной правильной особой точки.

Теорема 7.18 (Связь между характеристическими показателями и поведением решения в окрестности бесконечно удаленной правильной особой точки)**.** *Пусть ρ_1 и ρ_2 – характеристические показатели уравнения*

$$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0 \tag{7.28}$$

в окрестности бесконечно удаленной правильной особой точки. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) *Пусть $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$, тогда существует два решения уравнения* (7.28) *вида*

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n+\rho_1}, \quad W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n+\rho_2} \tag{7.29}$$

таких, что $c_0 \neq 0$ и $d_0 \neq 0$.

(2) *Пусть $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, тогда существует два решения уравнения* (7.28) *вида*

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n+\rho_1}, \quad W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n+\rho_2} + AW_1(z)\ln z \tag{7.30}$$

таких, что $c_0 \neq 0$ и $d_0 \neq 0$. При этом постоянная A может оказаться равной нулю.

(3) *Пусть $\rho_1 = \rho_2$, тогда существует два решения уравнения* (7.28) *вида* (7.30) *таких, что $c_0 \neq 0$, $d_0 = 0$ и $A \neq 0$.*

При этом ряды, указанные в (7.29) *и* (7.30)*, сходятся в любом круге $|z| > R$, не содержащем других особых точек уравнения* (7.28)*.*

Доказательство. Следует из теорем 7.12 и 7.13. □

7.5. **Метод Лапласа построения интегрального представления для решения линейного дифференциального уравнения с линейными коэффициентами.** Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с линейными коэффициентами

$$(a_n + b_n z)W^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1}z)W^{(n-1)} + \dots + (a_1 + b_1 z)W' + (a_0 + b_0 z)W = 0. \tag{7.31}$$

Здесь a_k и b_k – известные постоянные, W – неизвестная функция. Задача заключается в нахождении n линейно независимых решений уравнения (7.31). Для поиска решений можно применять метод Лапласа. Опишем основную идею этого метода.

Решение уравнения (7.31) строится в несколько шагов.

(1) Ищем решение уравнения (7.31) в виде интеграла

$$W(z) = \int_{\gamma} V(t)e^{zt}\,dt, \tag{7.32}$$

где γ – контур в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. При этом функция V и контур γ подлежат определению.

(2) Подставляя интеграл (7.32) в уравнение (7.31), получим выражение, которое можно привести к виду

$$\int\limits_{\gamma} \left[A(t)V'(t) + B(t)V(t)\right] e^{zt}\, dt + C(t)V(t)e^{zt}\big|_{\gamma} = 0, \tag{7.33}$$

используя преобразования

$$W^{(k)}(z) = \int\limits_{\gamma} V(t)t^k e^{zt}\, dt,$$

$$zW^{(k)}(z) = z\int\limits_{\gamma} V(t)t^k e^{zt}\, dt = \int\limits_{\gamma} V(t)t^k\, de^{zt} = V(t)t^k e^{zt}\big|_{\gamma} - \int\limits_{\gamma} (V(t)t^k)' e^{zt}\, dt.$$

Для того чтобы выполнялось равенство (7.33), достаточно потребовать выполнения двух соотношений

$$A(t)V'(t) + B(t)V(t) = 0, \tag{7.34}$$

$$C(t)V(t)e^{zt}\big|_{\gamma} = 0. \tag{7.35}$$

(3) Уравнение (7.34) служит для определения функции V и в случае $A \not\equiv 0$ интегрируется методом разделения переменных

$$V(t) = \exp\left(-\int^{t} \frac{B(\tau)}{A(\tau)}\, d\tau\right).$$

Еще раз обратим внимание на то, что в случае $A \not\equiv 0$ функция V является решением дифференциального уравнения *первого* порядка, которое *всегда* можно проинтегрировать. Именно это обстоятельство делает *метод Лапласа* эффективным средством при решении уравнений вида (7.31).

Условие (7.35) служит для определения контура γ. Заметим, что условие (7.35) должно выполняться при всех z. Отсюда следует, что контур γ должен быть либо замкнутым, либо начинаться и заканчиваться в точках (возможно бесконечно удаленных) где функция $C(t)V(t)e^{zt}$ обращается в ноль. Если контур уходит на бесконечность, то необходимо также проследить за сходимостью интеграла (7.32).

Замечание 7.19. *Не всегда возможно выбрать n различных контуров так, чтобы соответствующие интегральные представления* (7.32) *отвечали n линейно независимым решениям исходного уравнения* (7.31). *Например, для решений уравнения $(zW')' = zW'' + W' = 0$ невозможно указать два линейно независимых интегральных представление вида* (7.32).

Определение 7.20 (Метод Лапласа построения интегрального представления для решения линейного дифференциального уравнения с линейными коэффициентами)**.** *Методом Лапласа построения интегрального представления для решения линейного дифференциального уравнения с линейными коэффициентами вида*

$$(a_n + b_n z)W^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1}z)W^{(n-1)} + \cdots + (a_1 + b_1 z)W' + (a_0 + b_0 z)W = 0 \tag{7.36}$$

называют поиск решения уравнения (7.36) *в виде*

$$W(z) = \int\limits_{\gamma} V(t)e^{zt}\, dt,$$

где V – новая неизвестная функция и γ – контур в комплексной плоскости, который также подлежит определению.

7.6. **Основные идеи исследования решений линейных дифференциальных уравнений с регулярными коэффициентами.**

Определение 7.21 (Основные идеи исследования решений линейных дифференциальных уравнений с регулярными коэффициентами)**.**

- **Теорема Фукса.** *Исследовать поведение решений в окрестности всех особых точек уравнения (включая бесконечность).*
- **Метод Лапласа.** *Найти интегральные представления для решений уравнения.*
- **Асимптотические методы.** *Выделить интегральное представление, удовлетворяющее заданному поведению в окрестности одной из особых точек.*
- **Асимптотические методы.** *Используя выделенное интегральное представление, найти поведение решения в окрестности других особых точек (включая бесконечность).*

В качестве простейшего примера исследуем поведение решений уравнения

$$xW'' + W' + W = 0 \tag{7.37}$$

при $x \in \mathbb{R}$.

Легко видеть, что точка $x = 0$ – является правильной особой точкой, в то время как $x = \infty$ – неправильная особая точка. Характеристические показателя уравнения (7.37) для точки $x = 0$ равны $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Отсюда и из теоремы 7.12 следует, что существуют два решения уравнения (7.37), удовлетворяющие следующим условиям

$$W_1(x) = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad W_2(x) = \ln|x| + O(1), \quad x \to 0.$$

Отметим, что поскольку уравнение (7.37) имеет особую точку при $x = 0$, решения этого уравнения, вообще говоря, нужно рассматривать отдельно на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ (при «переходе» через точку $x = 0$ теорема существования и единственности решения задачи Коши не применима).

Используя метод Лапласа можно найти, что существует интегральное представление вида

$$W_3(x) = \int\limits_{|t|=1} \frac{1}{t}\, e^{-\frac{1}{t}+xt}\, dt,$$

которое является решением уравнения (7.37) и при $x < 0$ и при $x > 0$. Вместе с тем, второе интегральное представление может быть записано в виде

$$W_4(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{t}\, e^{-\frac{1}{t}+xt}\, dt, \quad x < 0,$$

$$W_5(x) = \int\limits_{\gamma} \frac{1}{t}\, e^{-\frac{1}{t}+xt}\, dt, \quad x > 0,$$

где γ – гладкий контур выходящий из начала координат в положительном направлении оси Ox и уходящий на бесконечность в отрицательном направлении оси Ox.

Легко видеть, что

$$W_3(0) = \int\limits_{|t|=1} \frac{1}{t}\, e^{-\frac{1}{t}}\, dt = 2\pi i$$

и, следовательно,

$$W_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{1}{t}\, e^{-\frac{1}{t}+xt}\, dt.$$

Аналогично, можно показать, что

$$W_4(x) = -\ln|x| + O(1) \quad \text{при} \quad x \to -0,$$
$$W_5(x) = \ln x + O(1) \quad \text{при} \quad x \to +0$$

и, следовательно,

$$W_2(x) = -W_4(x), \quad W_2(x) = W_5(x).$$

Найдем асимптотическое поведение $W_1(x)$ при $x \to -\infty$. Легко видеть, что

$$W_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{1}{t}\, e^{-\frac{1}{t}+xt}\, dt = \left[t = \frac{y}{\sqrt{|x|}}\right] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|y|=1} \frac{1}{y}\, e^{\sqrt{|x|}\left(-\frac{1}{y}-y\right)}\, dy = \left[y = e^{i\varphi}\right] =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-2\sqrt{|x|}\cos\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{|x|}}\, e^{2\sqrt{|x|}} \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)\right)$$

при $x \to -\infty$. Аналогично, получим, что

$$W_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{1}{t}\, e^{-\frac{1}{t}+xt}\, dt = \left[t = \frac{y}{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|y|=1} \frac{1}{y}\, e^{\sqrt{x}\left(-\frac{1}{y}+y\right)}\, dy = \left[y = e^{i\varphi}\right] =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{2i\sqrt{x}\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{2\sqrt{x}}}\, e^{2i\sqrt{x}-i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{2\sqrt{x}}}\, e^{-2i\sqrt{x}+i\frac{\pi}{4}} + \left(\frac{1}{x^{3/4}}\right) =$$
$$= \frac{\cos\left(2\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{x}} + \left(\frac{1}{x^{3/4}}\right)$$

при $x \to +\infty$.

Аналогичным образом можно исследовать поведение решения $W_2(x)$ при $x \to \pm\infty$.

8. Специальные функции

8.1. Уравнение Лежандра.

Определение 8.1 (Уравнение Лежандра). *Уравнением Лежандра называют уравнение вида*

$$\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}W+\nu(\nu+1)W=0,$$

где $\nu\in\mathbb{C}$.

Теорема 8.2 (Поведение решений уравнения Лежандра в окрестности его особых точек). *В окрестности точки* $z=1$ *уравнение Лежандра имеет два линейно независимых решения со следующим асимптотическим поведением*

$$W_1(z)=1+O(z-1),\quad W_2(z)=\ln(z-1)+O(1),\quad z\to 1.$$

В окрестности точки $z=-1$ *уравнение Лежандра имеет два линейно независимых решения со следующим асимптотическим поведением*

$$W_3(z)=1+O(z+1),\quad W_4(z)=\ln(z+1)+O(1),\quad z\to -1.$$

В окрестности бесконечности уравнение Лежандра при $2\nu\notin\mathbb{Z}$ *имеет два линейно независимых решения со следующим асимптотическим поведением*

$$W_5(z)=z^{\nu}+O(z^{\nu-1}),\quad W_6(z)=z^{-\nu-1}+O(z^{-\nu-2}),\quad z\to\infty.$$

Доказательство. Следует из теорем 7.12 и 7.18. □

Определение 8.3 (Функция Лежандра). *Решение* P_ν *уравнения Лежандра, регулярное в окрестности точки* $z=1$ *и удовлетворяющее условию*

$$P_\nu(1)=1,$$

называют функцией Лежандра.

Теорема 8.4 (Интегральное представление для функции Лежандра). *Пусть*

- $\nu\in\mathbb{C}$, $z\in(-1,1]$;
- $D=\mathbb{C}\setminus\big((-\infty,-1]\cup[z,1]\big)$;
- γ *– замкнутый гладкий контур в* D*, ориентированный против хода часовой стрелки, и, охватывающий отрезок* $[z,1]$;
- $f(t,z)$ *– регулярная в области* D *по переменной* t *ветвь функции* $\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}$*, удовлетворяющая условию* $\lim\limits_{t\to 1}f(t,1)(t-1)=2^\nu$*, где предполагается, что* $2^\nu=e^{\nu\ln 2}$.

Тогда

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i2^\nu}\int\limits_\gamma f(t,z)\,dt \tag{8.1}$$

или, в упрощенной записи,

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i2^\nu}\int\limits_\gamma \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt.$$

Доказательство. Регулярность функции f может быть установлена стандартными методами, например, с помощью введения полярных координат с центрами в точках $t = \pm 1$ и $t = z$.

Проверим, что функция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i 2^\nu} \int\limits_\gamma f(t,z)\,dt.$$

удовлетворяет уравнению Лежандра. Для этого заметим, что

$$\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}f(t,z) + \nu(\nu+1)f(t,z) = C\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t,z)}{t-z}\right),$$

где C – некоторая постоянная (проверка этого равенства довольно длинна и мы ее опустим). Отсюда получим, что

$$\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}F(z) + \nu(\nu+1)F(z) = \frac{1}{2\pi i 2^\nu}\int\limits_\gamma \left(\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}f(t,z) + \nu(\nu+1)f(t,z)\right)dt =$$

$$= \frac{C}{2\pi i 2^\nu}\int\limits_\gamma \frac{d}{dt}\left(\frac{f(t,z)}{t-z}\right)dt = 0.$$

Последний интеграл равен нулю в силу замкнутости контура γ и регулярности функции $f(t,z)$ по переменной t в окрестности γ.

Легко видеть, что

$$F(1) = \frac{1}{2\pi i 2^\nu}\int\limits_\gamma f(t,1)\,dt = \frac{1}{2\pi i 2^\nu}\int\limits_\gamma \frac{(t+1)^\nu}{t-1}\,dt = \frac{(1+1)^\nu}{2^\nu} = 1.$$

Таким образом, функции F и P_ν удовлетворяют уравнению Лежандра и начальному условию $F(1) = P_\nu(1) = 1$. Отсюда следует, что $F \equiv P_\nu$ в $\mathbb{C}$. $\square$

Замечание 8.5. *При $z \notin [-1,1]$ значения функции $P_\nu(z)$ могут быть получены с помощью аналитического продолжения интеграла* (8.1).

Теорема 8.6 (Вывод интегрального представления для функции Лежандра с помощью метода Лапласа)**.** *Интегральное представление для функции Лежандра может быть получено применением метода Лапласа к уравнению Лежандра.*

Доказательство. Будем искать решение уравнения Лежандра в виде интеграла Лапласа

$$W(z) = \int\limits_\Gamma V(t)e^{zt}\,dt. \tag{8.2}$$

Подставляя (8.2) в уравнение Лежандра получим, что

$$t^2V'' + 2tV' - [t^2 + \nu(\nu+1)]V = 0, \quad t^2(V'(t) - zV(t))e^{zt}\Big|_\Gamma. \tag{8.3}$$

Уравнение (8.3) является возмущением уравнением Эйлера

$$t^2V'' + 2tV' - \nu(\nu+1)V = 0,$$

одно из решений которого имеет вид t^ν (второе равно либо $t^{-\nu-1}$, либо $t^\nu \ln t$). Сделаем подстановку $V(t) = t^\nu Y(t)$ в уравнении (8.3). В результате получим, что

$$tY'' + 2(\nu+1)Y' - tY = 0. \tag{8.4}$$

Решая уравнение (8.4) методом Лапласа, получим

$$Y(t) = \int\limits_{\tilde{\gamma}} (\zeta^2 - 1)^\nu e^{\zeta t}\, d\zeta,$$

где γ – подходящий контур интегрирования.

Собирая полученные формулы вместе, найдем

$$W(z) = \int\limits_{\Gamma} t^\nu e^{zt} \left(\int\limits_{\tilde{\gamma}} (\zeta^2 - 1)^\nu e^{\zeta t}\, d\zeta \right) dt = \int\limits_{\tilde{\gamma}} (\zeta^2 - 1)^\nu \left(\int\limits_{\Gamma} t^\nu e^{(z+\zeta)t}\, dt \right) d\zeta = \Big[\tau = (\zeta + z)t\Big] =$$

$$= \int\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{(\zeta^2 - 1)^\nu}{(\zeta + z)^{\nu+1}} \left(\int\limits_{\tilde{\Gamma}} \tau^\nu e^\tau\, d\tau \right) d\zeta = C \int\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{(\zeta^2 - 1)^\nu}{(\zeta + z)^{\nu+1}}\, d\zeta = \Big[\zeta = -s\Big] = D \int\limits_{\gamma} \frac{(s^2 - 1)^\nu}{(s - z)^{\nu+1}}\, ds,$$

где C и D – некоторые постоянные. Мы позволим себе не останавливаться на описании контуров γ, $\tilde{\gamma}$, Γ и $\tilde{\Gamma}$, отметим лишь, что при правильном их выборе перестановка интегралов возможна в силу теоремы Фубини. $\square$

Теорема 8.7 (Поведение функции Лежандра в окрестности точки -1). *В окрестности точки $z_0 = -1$ справедливо равенство*

$$P_\nu(z) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi} \ln(z + 1) P_\nu(-z) + \omega(z),$$

где ω – некоторая регулярная функция в окрестности $z_0 = -1$.

Доказательство. Заметим, что функция $P_\nu(-z)$ является решением уравнения Лежандра, причем $P_\nu(-z)$ – регулярна в окрестности точки $z_0 = -1$. Отсюда и из теоремы 7.12 следует, что в окрестности точки $z_0 = -1$ справедливо разложение вида

$$P_\nu(z) = A \ln(z + 1) P_\nu(-z) + \omega(z),$$

где A – некоторая постоянная.

Утверждение о том, что $A = \frac{\sin \pi\nu}{\pi}$ мы позволим себе оставить без доказательства. $\square$

8.2. **Полиномы Лежандра.**

Теорема 8.8 (Формула Родрига (для полиномов Лежандра)). *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, тогда справедлива формула Родрига*

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n.$$

Доказательство. Из теоремы 8.4 следует, что

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i 2^n} \int\limits_{|t-z|=\varepsilon} \frac{(t^2 - 1)^n}{(t - z)^{n+1}}\, dt,$$

где ε – достаточно малое положительное число. Отсюда, применяя теорему о вычетах, получим что

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n} \operatorname*{res}_{t=z} \frac{(t^2 - 1)^n}{(t - z)^{n+1}} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \Big|_{t=z} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n. \square$$

Определение 8.9 (Полиномы Лежандра). *При всех $n \in \mathbb{Z}_+$ функцию вида*

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$$

называют полиномом Лежандра ($P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$, $P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$, $\ldots$).

Теорема 8.10 (Симметричность оператора отвечающего уравнению Лежандра). *Пусть*

- $\mathcal{L}u = -\frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{d}{dx}u(x)$;
- $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = C^2[-1, 1]$;
- $(\cdot, \cdot)$ – *скалярное произведение в* $L_2(-1, 1)$.

Тогда

$$\forall\ u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})\ \forall\ v \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \quad (\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v).$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$ и $v \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$. Интегрируя по частям, получим, что

$$(\mathcal{L}u, v) = -\int\limits_{-1}^{1} \big((1 - x^2)u'(x)\big)' v(x)\, dx = -(1 - x^2)u'(x)v(x)\Big|_{-1}^{1} + \int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2)u'(x)v'(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2)v'(x)\, du(x) = (1 - x^2)v'(x)u(x)\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} u(x) \big((1 - x^2)v'(x)\big)'\, dx = (u, \mathcal{L}v). \ \square$$

Теорема 8.11 (Свойства полиномов Лежандра). *Справедливы следующие утверждения.*

(1) $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad P_{-n-1} = P_n$.
(2) $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+$ *полином* P_n *имеет ровно* n *однократных корней на отрезке* $[-1, 1]$.
(3) $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+\ \forall\ z \in \mathbb{C} \quad P_n(z) = (-1)^n P_n(-z)$.
(4) $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ – *ортонормированный базис в* $L_2(-1, 1)$.

Доказательство. (1) Следует из того, что уравнение Лежандра при $\nu = n$ и $\nu = -n - 1$ имеет один и тот же вид.

(2) При $n = 0$ утверждение очевидно. Рассмотрим $n \in \mathbb{N}$. Функция $f(z) = (z^2 - 1)^n$ имеет нули порядка n в точках ± 1. Из теоремы Ролля следует, что функция $f'(z)$ имеет по крайней мере один нуль $z_1^{(1)}$ на интервале $(-1, 1)$. Отсюда и из теоремы Ролля следует, что функция $f^{(2)}(z)$ имеет по крайней мере по одному нулю $z_1^{(2)}$ и $z_2^{(2)}$ на каждом из интервалов $(-1, z_1^{(1)})$ и $(z_1^{(1)}, 1)$. Продолжая рассуждения получим, что функция $f^{(n)}(z)$ имеет по крайней по одному нулю $z_1^{(n)}$, $z_2^{(n)}$, $\ldots$ $z_n^{(n)}$ на каждом из интервалов вида

$$\left(-1, z_1^{(n-1)}\right), \quad \left(z_1^{(n-1)}, z_2^{(n-1)}\right), \quad \ldots, \quad \left(z_{n-1}^{(n-1)}, 1\right).$$

(3) Легко видеть, что

$$P_n(-z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(-z)^n} ((-z)^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(-z)^n} (z^2 - 1)^n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n = (-1)^n P_n(z).$$

(4) Пусть $\mathcal{L}$ – оператор, отвечающий уравнению Лежандра. Для любых $n \in \mathbb{Z}_+$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ таких, что $n \neq m$ верно, что

$$\mathcal{L}P_n = n(n + 1)P_n, \quad \mathcal{L}P_m = m(m + 1)P_m.$$

Отсюда и из теоремы 8.10 получим, что
$$n(n+1)(P_n,P_m)=(\mathcal{L}P_n,P_m)=(P_n,\mathcal{L}P_m)=m(m+1)(P_n,P_m),$$
откуда следует, что
$$(P_n,P_m)=0.$$
Таким образом, полиномы Лежандра образуют ортогональное семейство в $L_2(-1,1)$.

Далее, при $n\in\mathbb{Z}_+$ верно, что
$$\|P_n\|^2=\int\limits_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int\limits_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^nP_n(x)}{dx^n}\,dx=\int\limits_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=$$
$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int\limits_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}\,dx=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int\limits_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx=$$
$$=\frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int\limits_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx=\left[x^2=t,\ dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}\right]=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int\limits_{0}^{1}(1-t)^nt^{-1/2}\,dt=$$
$$=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}B\left(n+1,\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}=$$
$$=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\dots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{2}{(2n+1)}\frac{(2n)!}{2^nn!(2n-1)\dots1}=\frac{2}{(2n+1)}.$$
Таким образом, $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ – ортонормированное семейство в $L_2(-1,1)$.

Для завершения доказательства необходимо показать, что любой элемент из $L_2(-1,1)$ можно разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра. Легко видеть, что линейная оболочка полиномов Лежандра совпадает с пространством полиномов на отрезке $(-1,1)$ (любой полином можно разложить в конечный ряд по полиномам Лежандра). Далее, известно, что пространство полиномов на отрезке плотно в пространстве непрерывных функций (по норме в $C(-1,1)$, а, следовательно, и по норме в $L_2(-1,1)$). В свою очередь, пространство непрерывных функций плотно в $L_2(-1,1)$ (по норме в $L_2(-1,1)$). Окончательно, получим, что линейная оболочка полиномов Лежандра плотна в $L_2(-1,1)$ (по норме в $L_2(-1,1)$). Отсюда, с учетом того, что полиномы Лежандра образуют ортогональную систему, следует, что любой элемент из $L_2(-1,1)$ можно разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра. □

Определение 8.12 (Сингулярная задача Штурма-Лиувилля для уравнения Лежандра)**.** *Сингулярной задачей Штурма-Лиувилля для уравнения Лежандра называют задачу об определении всех параметров λ таких, что на интервале $(-1,1)$ существует нетривиальное решение задачи*
$$\mathcal{L}u=\lambda u,\quad u\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L}),$$
где

- $\mathcal{L}u=-\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}u(x)$;
- $\mathrm{Dom}(\mathcal{L})=C^2[-1,1]$.

Значение параметра λ, при котором данная задача имеет нетривиальное решение, называют собственным значением этой задачи, а соответствующее решение называется собственной функцией.

Теорема 8.13 (Собственные значения и собственные функции сингулярной задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Лежандра). *Собственные значения и собственные функции сингулярной задачи Штурма-Лиувилля для уравнения Лежандра имеют вид*

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad \lambda_n = n(n+1),\ u_n = P_n.$$

Доказательство. Следует из теорем 8.7 и 8.11. □

8.3. Присоединенные функции Лежандра.

Определение 8.14 (Присоединенное уравнение Лежандра). *Присоединенным уравнением Лежандра называют уравнение вида*

$$\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}W - \frac{m^2}{1-z^2}W + \nu(\nu+1)W = 0,$$

где $\nu \in \mathbb{C}$ *и* $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 8.15 (Поведение решений присоединенного уравнения Лежандра в окрестности особых точек). *В окрестности точки* $z = 1$ *присоединенное уравнение Лежандра имеет два линейно независимых решения со следующим асимптотическим поведением*

$$W_1(z) = (z-1)^{\frac{m}{2}} + O\left((z-1)^{\frac{m+2}{2}}\right), \quad W_2(z) = (z-1)^{-\frac{m}{2}} + o\left((z-1)^{-\frac{m}{2}}\right), \quad z \to 1.$$

В окрестности точки $z = -1$ *присоединенное уравнение Лежандра имеет два линейно независимых решения со следующим асимптотическим поведением*

$$W_3(z) = (z+1)^{\frac{m}{2}} + O\left((z+1)^{\frac{m+2}{2}}\right), \quad W_4(z) = (z+1)^{-\frac{m}{2}} + o\left((z+1)^{-\frac{m}{2}}\right), \quad z \to -1.$$

В окрестности бесконечности присоединенное уравнение Лежандра при $2\nu \notin \mathbb{Z}$ *имеет два линейно независимых решения со следующим асимптотическим поведением*

$$W_5(z) = z^{\nu} + O(z^{\nu-1}), \quad W_6(z) = z^{-\nu-1} + O(z^{-\nu-2}), \quad z \to \infty.$$

Доказательство. Следует из теорем 7.12 и 7.18. □

Теорема 8.16 (Связь между решениями присоединенного уравнения Лежандра и решениями уравнения Лежандра). *Пусть* V *– решение уравнения Лежандра. Тогда функция*

$$W(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}V(z)$$

является решением присоединенного уравнения Лежандра.

Доказательство. Сделаем подстановку

$$W(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}}\varphi(z)$$

в присоединенном уравнении Лежандра. В результате получим, что φ удовлетворяет уравнению вида

$$(1-z^2)\varphi'' - 2z(m+1)\varphi' + (\nu^2+\nu-m^2-m)\varphi = 0. \tag{8.5}$$

С другой стороны, дифференцируя m раз уравнение Лежандра

$$(1-z^2)V'' - 2zV' + (\nu^2+\nu)V = 0$$

по переменной z, получим, что

$$m=1:(1-z^2)V^{(3)}-2(1+1)zV^{(2)}+(\nu^2+\nu-2)V^{(1)}=0,$$
$$m=2:(1-z^2)V^{(4)}-2(2+1)zV^{(3)}+(\nu^2+\nu-2-4)V^{(2)}=0,$$
$$m=3:(1-z^2)V^{(5)}-2(3+1)zV^{(4)}+(\nu^2+\nu-2-4-6)V^{(3)}=0,$$
$$(1-z^2)V^{(m+2)}-2(m+1)zV^{(m+1)}+(\nu^2+\nu-m^2-m)V^{(m)}=0. \tag{8.6}$$

Сравнивая (8.5) и (8.6) получим утверждение теоремы. □

Определение 8.17 (Присоединенные функции Лежандра). *При всех $n\in\mathbb{Z}_+$ и $m\in\mathbb{N}$ таких, что $n\geqslant m$ функцию вида*

$$P_n^m(z)=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z)$$

называют присоединенной функцией Лежандра.

Кроме того, что полагают, что $P_n^0\equiv P_n$.

Теорема 8.18 (Симметричность оператора отвечающего присоединенному уравнению Лежандра). *Пусть*

- $\mathcal{L}u=-\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}u(x)+\frac{m^2}{1-x^2}u(x)$, *где* $m\in\mathbb{N}$;
- $\mathrm{Dom}(\mathcal{L})=\left\{u \;\middle|\; \frac{u(x)}{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}\in C^2[-1,1],\ \mathcal{L}u\in L_2(-1,1)\right\}$;
- $(\cdot,\cdot)$ – *скалярное произведение в* $L_2(-1,1)$.

Тогда

$$\forall\ u\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L})\ \forall\ v\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L})\quad (\mathcal{L}u,v)=(u,\mathcal{L}v).$$

Доказательство. Пусть $u\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L})$ и $v\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L})$. Отсюда следует, что корректно определен интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{u(x)v(x)}{1-x^2}\,dx.$$

Далее, также как и при доказательстве теоремы 8.10, интегрируя по частям, получим, что

$$(\mathcal{L}u,v)=(u,\mathcal{L}v).\ \square$$

Теорема 8.19 (Основное свойство присоединенных функций Лежандра). *Для любого $m\in\mathbb{Z}_+$ семейство функций $\{P_n^m\}_{n=m}^\infty$ образует ортогональный базис в $L_2(-1,1)$.*[4]

Доказательство. Из симметричности оператора, отвечающего присоединенному уравнению Лежандра, следует, что семейство $\{P_n^m\}_{n=m}^\infty$ является ортогональным в $L_2(-1,1)$.

Полнота семейства $\{P_n^m\}_{n=m}^\infty$ в $L_2(-1,1)$ может быть доказана также, как полнота семейства $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ в $L_2(-1,1)$ (см. доказательство теоремы 8.11). □

Определение 8.20 (Сингулярная задача Штурма-Лиувилля для присоединенного уравнения Лежандра). *Сингулярной задачей Штурма-Лиувилля для присоединенного уравнения Лежандра называют задачу об определении всех параметров λ таких, что на интервале $(-1,1)$ существует нетривиальное решение задачи*

$$\mathcal{L}u=\lambda u,\quad u\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L}),$$

где

[4] При $m\in\mathbb{Z}_+$ семейство функций $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,P_n^m\right\}_{n=m}^\infty$ образует ортонормированный базис в $L_2(-1,1)$.

- $\mathcal{L}u = -\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}u(x) + \frac{m^2}{1-x^2}u(x)$, $m \in \mathbb{N}$;
- $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \left\{ u \;\middle|\; \frac{u(x)}{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}} \in C^2[-1,1],\ \mathcal{L}u \in L_2(-1,1) \right\}$.

Значение параметра λ, при котором данная задача имеет нетривиальное решение, называют собственным значением этой задачи, а соответствующее решение называется собственной функцией.

Теорема 8.21 (Собственные значения и собственные функции сингулярной задачи Штурма–Лиувилля для присоединенного уравнения Лежандра)**.** *Собственные значения и собственные функции сингулярной задачи Штурма-Лиувилля для присоединенного уравнения Лежандра при $m \in \mathbb{N}$ имеют вид*

$$\forall\ n \geqslant m \quad \lambda_n = n(n+1),\ u_n = P_n^m.$$

Доказательство. Следует из теорем 8.7, 8.15 и 8.16. □

8.4. **Сферические функции.**

Теорема 8.22 (Оператор Лапласа в сферических координатах)**.** *Пусть*

- *в $\mathbb{R}^3$ заданы сферические координаты отображением ψ вида*
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$
где $\theta \in (0,\pi)$, $\varphi \in (0,2\pi)$ и $r \in (0,+\infty)$;
- *Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$;*
- *$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.*

Тогда

$$(\Delta f)\circ\psi = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\right](f\circ\psi),$$

где

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Доказательство. Без доказательства (доказано на 1-ом курсе).□

Определение 8.23 (Оператор Лапласа-Бельтрами)**.** *Оператор*

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

называют оператором Лапласа-Бельтрами на сфере в $\mathbb{R}^3$.

Определение 8.24 (Гладкая функция на сфере)**.** *Пусть*

- *$S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$;*
- *$f : S \to \mathbb{R}$.*

Говорят, что функция f бесконечно дифференцируема на сфере (или принадлежит классу $C^\infty(S)$), если для любой $s \in S$ найдутся область $D \subset \mathbb{R}^2$ и отображение $\psi \in C^\infty(D,S)$ такие, что

(1) *ψ – взаимно однозначно отображает D на S;*
(2) *$s \in \psi(D)$;*
(3) *$f \circ \psi \in C^\infty(D)$.*

Теорема 8.25 (Симметричность оператора Лапласа-Бельтрами). *Пусть*

- S – *единичная сфера с центром в начале координат в* $\mathbb{R}^3$*;*
- $\Delta_{\theta,\varphi}$ – *оператор Лапласа-Бельтрами на сфере* S*;*
- $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = C^\infty(S)$*;*
- $(\cdot,\cdot)$ – *скалярное произведение в* $\mathcal{H} = L_2\left((0,\pi)\times(0,2\pi);\ \sin\theta\right)$*, другими словами,*

$$\forall\ u\in\mathcal{H}\ \forall\ v\in\mathcal{H}\quad (u,v) = \int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} u(\theta,\varphi)\overline{v(\theta,\varphi)}\sin\theta\, d\varphi\, d\theta.$$

Тогда

$$\forall\ u\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L})\ \forall\ v\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L})\quad (\mathcal{L}u,v) = (u,\mathcal{L}v).$$

Доказательство. Доказывается интегрированием по частям (самостоятельно). □

Определение 8.26 (Задача на собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа-Бельтрами). *Пусть*

- S – *единичная сфера с центром в начале координат в* $\mathbb{R}^3$*;*
- $\Delta_{\theta,\varphi}$ – *оператор Лапласа-Бельтрами на сфере* S*;*
- $\mathrm{Dom}(\Delta_{\theta,\varphi}) = C^\infty(S)$.

Задачей на собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа-Бельтрами называют задачу об определении всех параметров λ *таких, что*

$$-\Delta_{\theta,\varphi}u = \lambda u,\quad u\in\mathrm{Dom}(\Delta_{\theta,\varphi}).$$

Значение параметра λ*, при котором данная задача имеет нетривиальное решение, называют собственным значением оператора Лапласа-Бельтрами, а соответствующее решение называется собственной функцией оператора Лапласа-Бельтрами.*

Теорема 8.27 (Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами). *Пусть*

- S – *единичная сфера с центром в начале координат в* $\mathbb{R}^3$*;*
- $\forall\ n\in\mathbb{Z}_+\quad \lambda_n = n(n+1)$*;*
- $\forall\ n\in\mathbb{Z}_+\ \forall\ m\in\{m\mid m\in\mathbb{Z}, |m|\leqslant n\}\quad Y_n^m(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}P_n^{|m|}(\cos\theta)$.

Тогда

(1) $\forall\ n\in\mathbb{Z}_+\ \forall\ m\in\{m\mid m\in\mathbb{Z}, |m|\leqslant n\}\quad -\Delta_{\theta,\varphi}Y_n^m = \lambda_n Y_n^m,\ Y_n^m\in C^\infty(S)$*;*

(2) *семейство функций*

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}P_n^{|m|}(\cos\theta),\ \text{где } n\in\mathbb{Z}_+,\ m\in\mathbb{Z} \text{ и } |m|\leqslant n$$

образует ортогональный базис в пространстве $L_2\left((0,\pi)\times(0,2\pi);\ \sin\theta\right)$*;*

(3) *семейство функций*

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}P_n^{|m|}(\cos\theta),\ \text{где } n\in\mathbb{Z}_+,\ m\in\mathbb{Z} \text{ и } |m|\leqslant n$$

образует ортогональный базис в пространстве $L_2(S)$*;*

(4) $\{Y_n^m\}$ – *полный набор собственных функций оператора Лапласа-Бельтрами на* S*;*

(5) $\{\lambda_n\}$ – *полный набор собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами на* S.

Доказательство. (1) Доказательство проведем методом разделения переменных. Для этого будем искать решение задачи

$$-\Delta_{\theta,\varphi}u = \lambda u,\quad u\in\mathrm{Dom}(\Delta_{\theta,\varphi})\tag{8.7}$$

в виде

$$u(\theta,\varphi)=Z(\theta)\Phi(\varphi). \tag{8.8}$$

Подставляя представление (8.8) в уравнение (8.7), получим, что

$$-\frac{\big(Z'(\theta)\sin\theta\big)'}{\sin\theta}\Phi(\varphi)-\frac{Z(\theta)}{\sin^2\theta}\Phi''(\varphi)=\lambda Z(\theta)\Phi(\varphi),$$

$$\frac{\big(Z'(\theta)\sin\theta\big)'\sin\theta}{Z(\theta)}+\lambda\sin^2\theta=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}. \tag{8.9}$$

Заметим, что равенство (8.9) должно выполняться для всех $\theta\in(0,\pi)$ и $\varphi\in(0,2\pi)$. Отсюда, учитывая, что левая часть равенства (8.9) зависит только от θ, а правая – от φ, получим, что найдется постоянная ν такая, что

$$\frac{\big(Z'(\theta)\sin\theta\big)'\sin\theta}{Z(\theta)}+\lambda\sin^2\theta=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\nu. \tag{8.10}$$

Отсюда и из условия $Z(\theta)\Phi(\varphi)\in C^\infty(S)$ следует, что Φ – 2π-периодическое решение уравнения

$$-\Phi''=\nu\Phi.$$

Решая полученную краевую задачу на функцию Φ получим, что

$$\forall\ m\in\mathbb{Z}\quad \nu_m=m^2,\ \Phi_n=e^{im\varphi}. \tag{8.11}$$

Из (8.11) и (8.10) получим, что Z удовлетворяет уравнению вида

$$\big(Z'\sin\theta\big)'\sin\theta+\lambda Z\sin^2\theta=m^2Z. \tag{8.12}$$

Сделаем замену переменных

$$\cos\theta=t,\quad Z(\theta)=v(\cos\theta) \tag{8.13}$$

в уравнении (8.12). В результате получим, что

$$Z'(\theta)\sin\theta=\frac{\partial v(\cos\theta)}{\partial\theta}\sin\theta=-v'(\cos\theta)\sin^2\theta=-v'(t)(1-t^2)\big|_{t=\cos\theta},$$

$$\big(Z'(\theta)\sin\theta\big)'\sin\theta=\big(v'(t)(1-t^2)\big)'(1-t^2)\big|_{t=\cos\theta},$$

откуда

$$-\big(v'(1-t^2)\big)'+\frac{m^2}{1-t^2}v=\lambda v. \tag{8.14}$$

При $m=0$ уравнение (8.14) является уравнением Лежандра, а при $m\neq0$ присоединенным уравнением Лежандра. Условия на поведение решений в окрестности точек $t=\pm1$ можно вывести из включения $Z(\theta)\Phi(\varphi)\in C^\infty(S)$ (например, очевидно, что решения должны оставаться ограниченными в окрестности точек $t=\pm1$). Теперь, из теорем 8.13 и 8.21 следует, что сингулярная задача Штурма-Лиувилля (8.14) (с условиями ограниченности решений в окрестности точек $t=\pm1$) имеет следующие собственные числа и собственные функции

$$\forall\ n\in\mathbb{Z}_+\ \forall\ m\in\{m\mid m\in\mathbb{Z},|m|\leqslant n\}\quad \lambda_n=n(n+1),\ v_n=P_n^{|m|}.$$

Собирая полученные результаты вместе, получим, что функция

$$Y_n^m(\theta,\varphi)=e^{im\varphi}P_n^{|m|}(\cos\theta)$$

при $n\in\mathbb{Z}_+$ и $m\in\{m\mid m\in\mathbb{Z},|m|\leqslant n\}$ являются собственными функциями оператора Лапласа-Бельтрами, отвечающие собственному значению $\lambda_n=n(n+1)$.

(2) Заметим, что для всех $n_1 \in \mathbb{Z}_+$, $m_1 \in \mathbb{Z}_+$, $n_2 \in \mathbb{Z}_+$ и $m_2 \in \mathbb{Z}_+$ таких, что $m_1 \leqslant n_1$ и $m_2 \leqslant n_2$ верно, что

$$\int\limits_0^{\pi} P_{n_1}^{m_1}(\cos\theta)P_{n_2}^{m_2}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = \int\limits_{-1}^{1} P_{n_1}^{m_1}(t)P_{n_2}^{m_2}(t)\,dt.$$

Отсюда и из теорем 8.11 и 8.19 следует, что для любого $m \in \mathbb{Z}$ семейство функций

$$P_n^{|m|}(\cos\theta),\ n \in \mathbb{Z}_+,\ n \geqslant |m|$$

образует ортогональный базис в пространстве $L_2\left((0,\pi);\ \sin\theta\right)$. Вместе с этим, известно, что семейство функций $\{e^{im\varphi}\}_{-\infty}^{+\infty}$ образует ортогональный базис в пространстве $L_2(0,2\pi)$. Отсюда легко следует, что семейство функций

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}P_n^{|m|}(\cos\theta),\ \textit{где } n \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{Z} \textit{ и } |m| \leqslant n$$

образует ортогональный базис в пространстве $L_2\left((0,\pi)\times(0,2\pi);\ \sin\theta\right)$;

(3) Следует из того, что

$$\int\limits_S f(\theta,\varphi)\,dS = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\varphi\,d\theta.$$

(4) Из (3) и из симметричности оператора Лапласа-Бельтрами (см. теорему 8.25) следует, что собственных функций, ортогональных семейству $\{Y_n^m\}$, оператор Лапласа-Бельтрами не имеет.

(5) Следует из (4). □

Определение 8.28 (Сферические функции)**.** *Сферической функцией Y_n порядка $n \in \mathbb{Z}_+$ называют любую линейную комбинацию функций вида*

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}P_n^{|m|}(\cos\theta)$$

где $|m| \leqslant n$.

Теорема 8.29 (Полиномиальное свойство сферических функций)**.** *Пусть S – единичная сфера с центром в начале координат в $\mathbb{R}^3$.*

Справедливы следующие утверждения.

(1) *Для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ функция $r^nY_n(\theta,\varphi)$ является однородным полином степени n относительно декартовых координат.*
(2) *Для любых $n \in \mathbb{Z}_+$ и $m \in \mathbb{Z}$ таких, что $|m| \leqslant n$ верно, что $Y_n^m \in C^\infty(S)$;*
(3) *Для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ функция $r^nY_n(\theta,\varphi)$ является гармонической.*

Доказательство. (1) Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ такие, что $m \leqslant n$, тогда

$$r^nY_n^m(\theta,\varphi) = r^ne^{im\varphi}P_n^m(\cos\theta) = \frac{1}{2^nn!}r^ne^{im\varphi}(1-t^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}(t^2-1)^n\Big|_{t=\cos\theta} =$$
$$= \frac{1}{2^nn!}r^ne^{im\varphi}\sin^m\theta\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}(t^2-1)^n\Big|_{t=\cos\theta} = \frac{(x+iy)^m}{2^nn!}r^{n-m}\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}(t^2-1)^n\Big|_{t=\cos\theta}.$$

Заметим теперь, что

$$\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}(t^2-1)^n\Big|_{t=\cos\theta} = a_{n-m}\cos^{n-m}\theta + a_{n-m-2}\cos^{n-m-2}\theta + \ldots,$$

где $a_{n-m},\ a_{n-m-2},\ldots$ – некоторые постоянные коэффициенты. Следовательно,

$$r^{n-m}\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}(t^2-1)^n\Big|_{t=\cos\theta} = a_{n-m}z^{n-m} + a_{n-m-2}z^{n-m-2}r^2 + \ldots.$$

Отсюда, учитывая, что r^2 – однородным полином степени 2 относительно декартовых координат (x, y, z), получим, что $r^nY_n^m(\theta,\varphi)$ – однородным полином степени n относительно декартовых координат (x, y, z).

(2) Следует из (1) и элементарного включения $r \in C^\infty(S)$.

(3) Легко видеть, что

$$\Delta\big(r^nY_n(\theta,\varphi)\big) = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\right]\big(r^nY_n(\theta,\varphi)\big) = r^{-2}\big(r^2(r^n)'\big)'Y_n(\theta,\varphi) + r^{n-2}\Delta_{\theta,\varphi}Y_n(\theta,\varphi) =$$
$$= r^{n-2}n(n+1)Y_n(\theta,\varphi) - r^{n-2}n(n+1)Y_n(\theta,\varphi) = 0. \ \square$$

8.5. **Функция Бесселя.**

Определение 8.30 (Уравнение Бесселя)**.** *Уравнением Бесселя называют уравнение вида*

$$z^2\frac{d^2}{dz^2}W + z\frac{d}{dz}W + (z^2-\nu^2)W = 0,$$

где $\nu \in \mathbb{C}$.

Теорема 8.31 (Поведение решений уравнения Бесселя в окрестности его особых точек)**.** *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *В окрестности точки $z = 0$ уравнение Бесселя имеет решения со следующими асимптотическими поведениями:*
   - *при $2\nu \notin \mathbb{Z}$ (или $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$)*
   $$W_1(z) = z^\nu + O(z^{\nu+1}) \quad z \to 0;$$
   - *при $2\nu \notin \mathbb{Z}$ (или $\operatorname{Re}\nu \leqslant 0$)*
   $$W_2(z) = z^{-\nu} + O(z^{-\nu+1}) \quad z \to 0;$$
   - *при $\nu = 0$*
   $$W_3(z) = \ln z + O(z\ln z) \quad z \to 0.$$

(2) *В окрестности бесконечности уравнение Бесселя имеет неправильную особую точку.*

Доказательство. (1) Характеристические показатели уравнения Бесселя в окрестности точки $z = 0$ являются решениями уравнения

$$\rho(\rho-1) + \rho - \nu^2 = 0$$

и, следовательно, $\rho_1 = \nu$ и $\rho_2 = -\nu$ при $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$. Теперь необходимое утверждение следует из теоремы 7.12.

(2) Следует из теоремы 7.16 $\square$.

Теорема 8.32 (Решение уравнения Бесселя гладко зависящее от параметра ν)**.** *При $\nu \in \mathbb{C}$ существует решение уравнения Бесселя вида*

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}. \tag{8.15}$$

При $\Gamma(n+\nu+1) = \infty$, коэффициент $\frac{1}{\Gamma(n+\nu+1)}$ полагается равным нулю.

Доказательство. Из теоремы 7.12 следует, что при $2\nu \notin \mathbb{Z}$ существует решение уравнения Бесселя вида

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\nu}. \tag{8.16}$$

Подставляя разложение (8.16) в уравнение Бесселя, получим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)(n+\nu-1)c_n z^{n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)c_n z^{n+\nu} - \sum_{n=0}^{\infty}\nu^2 c_n z^{n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\nu+2} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2\nu n)c_n z^{n+\nu} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} z^{n+\nu} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, найдем

$$\begin{aligned} z^{\nu} &: 0\cdot c_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_0 \text{ – произвольное},\\ z^{\nu+1} &: (1+2\nu)c_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0,\\ z^{\nu+n}(n \geqslant 2) &: (n^2+2\nu n)c_n + c_{n-2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_n = -\frac{c_{n-2}}{n^2+2\nu n}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\forall\, p \in \mathbb{N}$ верно, что

$$\begin{aligned} c_{2p-1} &= 0,\\ c_{2p} &= -\frac{c_{2p-2}}{2p(2p+2\nu)} = \frac{-1}{2^2 p(p+\nu)}\, c_{2p-2} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}p!}\frac{c_0}{(p+\nu)(p-1+\nu)\ldots(1+\nu)}. \end{aligned}$$

Полагая $c_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(1+\nu)}$, получим, что

$$\forall\, p \in \mathbb{Z}_+ \quad c_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+\nu}p!}\frac{1}{(p+\nu)(p-1+\nu)\ldots(1+\nu)\Gamma(1+\nu)} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+\nu}p!\,\Gamma(p+\nu+1)}\,.$$

Таким образом,

$$W(z) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma(p+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p+\nu}$$

является решением уравнения Бесселя при $2\nu \notin \mathbb{Z}$.

Проверка того факта, что (8.15) является решением уравнения Бесселя при всех $\nu \in \mathbb{C}$ осуществляется прямой подстановкой. Мы позволим себе опустить эти выкладки. □

Определение 8.33 (Функция Бесселя)**.** *При $\nu \in \mathbb{C}$ решение уравнения Бесселя вида*

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

называют функцией Бесселя.

Теорема 8.34 (Свойства функции Бесселя)**.** *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *При $\nu \notin \mathbb{Z}$ функции J_ν и $J_{-\nu}$ – образуют базис решений уравнения Бесселя;*
(2) *При $n \in \mathbb{N}$ верно, что $J_{-n} = (-1)^n J_n$;*
(3) *При $n \in \mathbb{Z}$ функции J_{-n} и J_n линейно зависимы.*

Доказательство. (1) При $\nu \notin \mathbb{Z}$ верно, что

$$J_\nu(z) = Az^\nu + O(z^{\nu+1}), \quad J_{-\nu}(z) = Bz^{-\nu} + O(z^{-\nu+1}), \quad z \to 0,$$

где A и B – некоторые нетривиальные постоянные. Отсюда легко следует, что функции J_ν и $J_{-\nu}$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис решений уравнения Бесселя.

(2) При $n \in \mathbb{N}$ верно, что

$$J_{-n}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma(p-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p-n} = \left[\frac{1}{\Gamma(-n+1)} = \ldots = \frac{1}{\Gamma(0)} = 0\right] =$$

$$= \sum_{p=n}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma(p-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p-n} = \left[p = k+n\right] = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+n)!\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^n J_n(z).$$

(3) Следует из (2). $\square$

Теорема 8.35 (Рекуррентные соотношения для функций Бесселя)**.** *Справедливы следующие утверждения.*

(1) $\forall\, \nu \in \mathbb{C} \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{J_\nu(z)}{z^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(z)}{z^\nu}$.

(2) $\forall\, \nu \in \mathbb{C} \quad \frac{d}{dz}\left(z^\nu J_\nu(z)\right) = z^\nu J_{\nu-1}(z)$.

(3) $\forall\, \nu \in \mathbb{C} \quad J_{\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z)$.

Доказательство. (1) Из определения 8.33 следует, что

$$\forall\, \nu \in \mathbb{C} \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{J_\nu(z)}{z^\nu}\right) = \frac{1}{2^\nu}\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2^\nu}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-1} =$$

$$= \left[n = p+1\right] = \frac{1}{2^\nu}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p!\,\Gamma(p+\nu+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p+1} = \frac{1}{z^\nu}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p!\,\Gamma(p+\nu+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p+\nu+1} = -\frac{J_{\nu+1}(z)}{z^\nu}.$$

(2) Из определения 8.33 следует, что

$$\forall\, \nu \in \mathbb{C} \quad \frac{d}{dz}\left(z^\nu J_\nu(z)\right) = 2^\nu \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+2\nu} =$$

$$= 2^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\nu)(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+2\nu-1} = z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu-1} = z^\nu J_{\nu-1}(z).$$

(3) Из (1) и (2) следует, что

$$\begin{cases} \frac{J_\nu'(z)}{z^\nu} - \nu\frac{J_\nu(z)}{z^{\nu+1}} = -\frac{J_{\nu+1}(z)}{z^\nu}, \\ z^\nu J_\nu'(z) + \nu z^{\nu-1} J_\nu(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z) \end{cases} \implies \begin{cases} J_\nu'(z) - \nu\frac{J_\nu(z)}{z} = -J_{\nu+1}(z), \\ J_\nu'(z) + \nu\frac{J_\nu(z)}{z} = J_{\nu-1}(z) \end{cases} \implies$$

$$\implies \frac{2\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z) \; \square$$

Теорема 8.36 (Функция Бесселя полуцелого значка)**.** *Справедливы следующие утверждения.*

(1) $J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$.

(2) $J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z.$

Доказательство. (1) Из определения 8.33 следует, что

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{3}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\dots\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!\,2^n(2n+1)(2n-1)\dots 1} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z.$$

(2) Из теоремы 8.35 следует, что

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{z}\, J_{\frac{1}{2}}(z)\right) = \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z. \ \square$$

Теорема 8.37 (Интегральные представления для решений уравнения Бесселя)**.** *Пусть* γ – *гладкий контур в* $\mathbb{C}$*, удовлетворяющий условию*

$$(t^2+1)^{\nu+\frac{1}{2}} e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0.$$

Тогда

$$W(z) = z^{\nu} \int\limits_{\gamma} (t^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{zt}\, dt$$

является решением уравнения Бесселя.

Доказательство. Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 8.6. Сделаем подстановку $W(z) = z^{\nu} V(z)$ в уравнении Бесселя. В результате получим, что

$$zV'' + (2\nu+1)V' + zV = 0. \tag{8.17}$$

Решая уравнение (8.17) методом Лапласа, получим

$$V(z) = \int\limits_{\gamma} (t^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{zt}\, dt,$$

где γ – контур интегрирования, удовлетворяющий условию

$$(t^2+1)^{\nu+\frac{1}{2}} e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0. \ \square$$

Теорема 8.38 (Интегральное представление для функции Бесселя)**.** *Пусть* $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$*, тогда*

$$J_{\nu}(z) = \frac{z^{\nu}}{\sqrt{\pi}\, 2^{\nu}\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{-1}^{1} (1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{izs}\, ds.$$

Доказательство. Из теоремы 8.37 следует, что

$$W(z) = z^{\nu} \int\limits_{-i}^{i} (t^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{zt}\, dt$$

является решением уравнения Бесселя при $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$.

Легко видеть, что

$$\lim_{z\to 0} z^{-\nu}W(z) = \int\limits_{-i}^{i} (t^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = \Big[t = is\Big] = i\int\limits_{-1}^{1} (1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,ds = 2i\int\limits_{0}^{1} (1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,ds =$$

$$= \Big[x = s^2\Big] = i\int\limits_{0}^{1} (1-x)^{\nu-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\,dx = iB\left(\nu+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = i\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+1\right)} = \frac{i\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+1\right)}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\lim_{z\to 0} z^{-\nu}J_\nu(z) = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)},$$

получим, что

$$J_\nu(z) = \frac{1}{i\sqrt{\pi}\,2^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}W(z).$$

Окончательно,

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{i\sqrt{\pi}\,2^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{-i}^{i} (t^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{zt}\,dt = \Big[t = is\Big] = \frac{z^\nu}{\sqrt{\pi}\,2^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{-1}^{1} (1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{izs}\,ds. \ \square$$

Теорема 8.39 (Лемма Эрдейи)**.** *Пусть*

- $\alpha \geqslant 1,\ \beta > 0$;
- $f \in C^\infty[0,a]$, *где* $a > 0$;
- $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+\ f^{(n)}(a) = 0$.

Тогда

$$\int\limits_{0}^{a} x^{\beta-1}f(x)e^{i\lambda x^\alpha}\,dx = f(0)\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)e^{\frac{i\pi\beta}{2\alpha}}}{\alpha}\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}} + O\left(\lambda^{-\frac{\beta+1}{\alpha}}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Без доказательства. □

Теорема 8.40 (Асимптотическое поведение функции Бесселя при больших положительных значениях аргумента)**.** *Пусть* $\nu \in \mathbb{C}$, *тогда*

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

при $x \to +\infty$.

Доказательство. Доказательство проведем только для случая $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$.

Пусть χ_- и χ_+ – разбиение единицы для отрезка $[-1,1]$ такое, что

$$\begin{aligned} \chi_- \in C^\infty[-1,1], &\quad \chi_+ \in C^\infty[-1,1], \\ \forall\ s \in [-1,-1/2] &\quad \chi_-(s) = 1,\ \chi_+(s) = 0, \\ \forall\ s \in [1/2,1] &\quad \chi_-(s) = 0,\ \chi_+(s) = 1, \\ \forall\ s \in [-1,1] &\quad \chi_-(s) + \chi_+(s) = 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что
$$\int_{-1}^{1}(1-s^2)^{\nu-\frac12}e^{ixs}\,ds=\int_{-1}^{1}(1-s^2)^{\nu-\frac12}\chi_-(s)e^{ixs}\,ds+\int_{-1}^{1}(1-s^2)^{\nu-\frac12}\chi_+(s)e^{ixs}\,ds.$$

Применяя теорему 8.39 (лемма Эрдейи) получим, что
$$\int_{-1}^{1}(1-s^2)^{\nu-\frac12}\chi_-(s)e^{ixs}\,ds=\Big[s+1=t\Big]=e^{-ix}\int_{0}^{2}t^{\nu-\frac12}(2-t)^{\nu-\frac12}\chi_-(t-1)e^{ixt}\,dt=$$
$$=e^{-ix}2^{\nu-\frac12}\Gamma\left(\nu+\frac12\right)e^{\frac{i\pi}{2}\left(\nu+\frac12\right)}x^{-\nu-\frac12}+O\left(x^{-\nu-\frac32}\right),$$
$$\int_{-1}^{1}(1-s^2)^{\nu-\frac12}\chi_+(s)e^{ixs}\,ds=\Big[1-s=t\Big]=e^{ix}\int_{0}^{2}t^{\nu-\frac12}(2-t)^{\nu-\frac12}\chi_+(1-t)e^{-ixt}\,dt=$$
$$=e^{ix}2^{\nu-\frac12}\Gamma\left(\nu+\frac12\right)e^{-\frac{i\pi}{2}\left(\nu+\frac12\right)}x^{-\nu-\frac12}+O\left(x^{-\nu-\frac32}\right).$$

Следовательно,
$$J_\nu(x)=\frac{x^\nu}{\sqrt{\pi}\,2^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac12\right)}\int_{-1}^{1}(1-s^2)^{\nu-\frac12}e^{ixs}\,ds=$$
$$=\frac{x^\nu}{\sqrt{\pi}\,2^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac12\right)}2^{\nu-\frac12}\Gamma\left(\nu+\frac12\right)x^{-\nu-\frac12}\left[e^{-ix}e^{\frac{i\pi}{2}\left(\nu+\frac12\right)}+e^{ix}e^{-\frac{i\pi}{2}\left(\nu+\frac12\right)}+O\left(x^{-1}\right)\right]=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right)+O\left(\frac1x\right)\right]$$
при $x\to+\infty$. □

Теорема 8.41 (Нули функции Бесселя)**.** *Пусть $\nu\geqslant 0$, тогда*

(1) *функция Бесселя $J_\nu(x)$ при $x>0$ имеет счетный набор вещественных нулей, которые накапливаются на бесконечности: $\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_n<\ldots$;*
(2) *все положительные нули функции Бесселя J_ν простые (т.е. $\forall\ n\in\mathbb{N}\ J_\nu'(\mu_n)\neq 0$);*
(3) *$\mu_n=\pi n+\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}+o(1)$ при $n\to+\infty$;*
(4) *множество всех нулей функции $z^{-\nu}J_\nu(z)$ в $\mathbb{C}$ имеет вид $\{\pm\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Доказательство. Без доказательства. □

8.6. **Функции Ханкеля и Неймана.**

Определение 8.42 (Функции Ханкеля)**.** *При $\nu\in\mathbb{C}$ решения уравнения Бесселя, имеющие асимптотическое поведение вида*
$$H_\nu^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right)}+O\left(\frac1x\right)\right],$$
$$H_\nu^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right)}+O\left(\frac1x\right)\right]$$
при $x\to+\infty$, называют функциями Ханкеля первого и второго рода соответственно.

Теорема 8.43 (Лемма Ватсона)**.** *Пусть*

- $\alpha > 0$, $\beta > 0$*;*
- $f \in C^\infty[0,a]$, *где* $a > 0$.

Тогда

$$\int\limits_0^a x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha}\, dx = f(0)\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\alpha}\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}} + O\left(\lambda^{-\frac{\beta+1}{\alpha}}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Без доказательства. □

Теорема 8.44 (Интегральное представление для функции Ханкеля первого рода)**.** *Пусть* $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$ *и* $\operatorname{Re} z > 0$, *тогда*

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{z^\nu}{i\sqrt{\pi}\, 2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{i-\infty}^{i} (t^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{zt}\, dt \tag{8.18}$$

где ветвь многозначной функции $(t^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}}$ *выбирается так, чтобы*

$$\forall\ t \in (i-\infty, i) \quad \arg(t^2+1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Из теоремы 8.37 следует, что (8.18) – решение уравнения Бесселя. Для завершения доказательство необходимо доказать, что функция (8.18) обладает требуемым асимптотическим поведением при $x \to +\infty$.

Из теоремы 8.43 (лемма Ватсона) следует, что

$$\int\limits_{i-\infty}^{i} (t^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{xt}\, dt = \Big[t = i - s\Big] = e^{ix}\int\limits_0^\infty s^{\nu-\frac{1}{2}}(s-2i)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-xs}\, ds =$$

$$= e^{ix}(-2i)^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) x^{-\nu-\frac{1}{2}} + O\left(x^{-\nu-\frac{3}{2}}\right) = e^{ix-i\frac{\pi}{2}(\nu-\frac{1}{2})}2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) x^{-\nu-\frac{1}{2}} + O\left(x^{-\nu-\frac{3}{2}}\right)$$

при $x \to +\infty$. Следовательно,

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{x^\nu}{i\sqrt{\pi}\, 2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} e^{ix-i\frac{\pi}{2}(\nu-\frac{1}{2})}2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) x^{-\nu-\frac{1}{2}} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right)} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

при $x \to +\infty$. □

Теорема 8.45 (Интегральное представление для функции Ханкеля второго рода)**.** *Пусть* $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$ *и* $\operatorname{Re} z > 0$, *тогда*

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{z^\nu}{-i\sqrt{\pi}\, 2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{-i-\infty}^{-i} (t^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{zt}\, dt$$

где ветвь многозначной функции $(t^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}}$ *выбирается так, чтобы*

$$\forall\ t \in (-i-\infty, -i) \quad \arg(t^2+1) = \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 8.46 (Связь между функцией Бесселя и функциями Ханкеля)**.** *Пусть* $\nu \in \mathbb{C}$, *тогда*

$$J_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)}{2}.$$

Доказательство. Следует из того, что функции $J_\nu(z)$ и $\frac{H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)}{2}$ являются решением уравнения Бесселя и, кроме того, обладают одинаковым асимптотическим поведением при $z \to +\infty$ (см. теорему 8.40, определение 8.42 и теоремы 8.44 и 8.45). □

Определение 8.47 (Функция Неймана)**.** *Пусть* $\nu \in \mathbb{C}$, *тогда*

$$N_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)}{2i}.$$

Теорема 8.48 (Асимптотическое поведение функции Неймана при больших положительных значениях аргумента)**.** *Пусть* $\nu \in \mathbb{C}$, *тогда*

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

при $x \to +\infty$.

Доказательство. Следует из определений 8.42, 8.47 и теорем 8.44, 8.45. □

Теорема 8.49 (Связь между функцией Неймана и функциями Бесселя)**.** *Пусть* $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, *тогда*

$$N_\nu(z) = \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}.$$

Доказательство. Функции $N_\nu(z)\sin(\pi\nu)$ и $\cos(\pi\nu)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)$ являются решением уравнения Бесселя, поэтому для доказательства равенства этих функций достаточно доказать, что они обладают одинаковым асимптотическим поведением при $z \to +\infty$. Используя тригонометрическую формулу

$$\sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta),$$

и теорему 8.48 получим, что

$$\sin(\pi\nu)N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin(\pi\nu)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos(\pi\nu)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}(2\nu+1) + \pi\nu\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos(\pi\nu)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}(-2\nu+1)\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

при $x \to +\infty$. Вместе с этим, из теоремы 8.40 следует, что

$$\cos(\pi\nu)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos(\pi\nu)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}(-2\nu+1)\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

при $x \to +\infty$. □

Теорема 8.50 (Поведение функции Неймана целого значка при $z \to 0$)**.** *Пусть $n \in \mathbb{Z}$, тогда*

(1) $N_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln z + z^{-|n|} \psi_n(z)$ *при* $z \to 0$, *где* $\psi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$;

(2) $N_0(z) = \frac{2}{\pi} \ln z + O(1)$ *при* $z \to 0$.

Доказательство. (1) Легко видеть, что

$$\frac{\partial z^\nu}{\partial \nu}\Big|_{\nu=n} = \frac{\partial e^{\nu \ln z}}{\partial \nu}\Big|_{\nu=n} = e^{\nu \ln z} \ln z\Big|_{\nu=n} = z^n \ln z.$$

Следовательно,

$$\dot{J}_n(z) = \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}\Big|_{\nu=n} = \frac{\partial}{\partial \nu}\left(z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{1}{2^\nu} \right)\Big|_{\nu=n} = J_n(z)\ln z + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(n) z^{2k+n},$$

$$\dot{J}_{-n}(z) = \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}\Big|_{\nu=-n} = J_{-n}(z)\ln z + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(-n) z^{2k-n} = (-1)^n J_n(z) \ln z + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(-n) z^{2k-n},$$

где $c_k(n)$ – некоторые коэффициенты, зависящие от k и n.

Воспользуемся теперь теоремой 8.49. Применяя правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$, получим, что

$$N_n(z) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(z) = \frac{\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\cos(\pi\nu) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)\right)}{\frac{\partial \sin(\pi\nu)}{\partial \nu}}\Bigg|_{\nu=n} = \frac{\cos(\pi n)\dot{J}_n(z) + \dot{J}_{-n}(z)}{\pi \cos(\pi n)} =$$

$$= \frac{\dot{J}_n(z) + (-1)^n \dot{J}_{-n}(z)}{\pi} = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln z + z^{-|n|} \sum_{k=0}^{\infty} d_k(n) z^{2k}.$$

(2) Следует из (1) и очевидной оценки $J_0(z) = 1 + O(z^2)$ при $z \to 0$. $\square$

8.7. **Сингулярная задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя.**

Теорема 8.51 (Симметричность оператора отвечающего уравнению Бесселя на конечном интервале)**.** *Пусть*

- $\nu \geqslant 0$, $l > 0$;
- $\mathcal{L}u(x) = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} u(x) + \frac{\nu^2}{x^2} u(x)$;
- $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \left\{ u \;\Big|\; \frac{u(x)}{x^\nu} \in C^2[0,l],\ \mathcal{L}u \in L_2((0,l);x),\ u(l) = 0 \right\}$;
- $(\cdot,\cdot)$ – *скалярное произведение в* $L_2((0,l);x)$, *другими словами,*

$$(u,v) = \int\limits_0^l u(x)\overline{v(x)}\, x\, dx.$$

Тогда

$$\forall\ u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})\ \forall\ v \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \quad (\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v).$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$ и $v \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$. Интегрируя по частям, получим, что

$$(\mathcal{L}u, v) = \int\limits_0^l \left(-\frac{1}{x}(xu'(x))' + \frac{\nu^2}{x^2}u(x)\right)\overline{v(x)}\,x\,dx = -\int\limits_0^l (xu'(x))'\overline{v(x)}\,dx + \int\limits_0^l \frac{\nu^2}{x}u(x)\overline{v(x)}\,dx =$$

$$= -xu'(x)\overline{v(x)}\Big|_0^l + \int\limits_0^l xu'(x)\overline{v'(x)}\,dx + \int\limits_0^l \frac{\nu^2}{x}u(x)\overline{v(x)}\,dx =$$

$$= xu(x)\overline{v'(x)}\Big|_0^l - \int\limits_0^l u(x)(x\overline{v'(x)})'\,dx + \int\limits_0^l \frac{\nu^2}{x}u(x)\overline{v(x)}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^l u(x)\overline{\left(-\frac{1}{x}(xv'(x))' + \frac{\nu^2}{x^2}v(x)\right)}\,x\,dx = (u, \mathcal{L}v). \ \square$$

Определение 8.52 (Сингулярная задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на конечном интервале)**.** *Пусть*

- $\nu \geqslant 0,\ l > 0$;
- $\mathcal{L}u(x) = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}u(x) + \frac{\nu^2}{x^2}u(x)$;
- $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \left\{u \;\middle|\; \frac{u(x)}{x^\nu} \in C^2[0,l],\ \mathcal{L}u \in L_2((0,l);x),\ u(l) = 0\right\}$;
- $(\cdot,\cdot)$ – *скалярное произведение в* $L_2((0,l);x)$.

Сингулярной задачей Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя называют задачу об определении всех параметров λ *таких, что на интервале* $(0,l)$ *существует нетривиальное решение задачи*

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \quad u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}).$$

Значение параметра λ*, при котором данная задача имеет нетривиальное решение, называют собственным значением этой задачи, а соответствующее решение называется собственной функцией.*

Теорема 8.53 (Собственные значения и собственные функции сингулярной задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя на конечном интервале)**.** *Пусть*

- $\nu \geqslant 0,\ l > 0$;
- $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ – *положительные нули функции Бесселя* J_ν.

Тогда собственные значения и собственные функции сингулярной задачи Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на интервале $(0,l)$ *имеют вид*

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2,\ u_n(x) = J_\nu\left(\frac{\mu_n x}{l}\right).$$

Доказательство. Перепишем уравнение

$$\mathcal{L}u = \lambda u$$

в виде

$$x^2u''(x) + xu'(x) + (\lambda x^2 - \nu^2)u(x) = 0. \tag{8.19}$$

Заметим, что при $\lambda = 0$ уравнение (8.19) является уравнением Эйри, общее решение, которого имеет вид
$$u(x) = Ax^{\nu} + Bx^{-\nu}$$
при $\nu \neq 0$ и
$$u(x) = A + B\ln x$$
при $\nu = 0$. Из условий $\frac{u(x)}{x^{\nu}} \in C^2[0,l]$ и $u(l) = 0$ следует, что $A = 0$ и $B = 0$. Таким образом, $\lambda = 0$ не может быть собственным значением оператора $\mathcal{L}$ (с областью определения $\mathrm{Dom}(\mathcal{L})$).

Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Выполняя подстановку $u(x) = W(x\sqrt{\lambda})$ в уравнении (8.19) получим, что
$$\lambda x^2 W''(x\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}xW'(x\sqrt{\lambda}) + (\lambda x^2 - \nu^2)W(x\sqrt{\lambda}) = 0$$
и, следовательно,
$$z^2W''(z) + zW'(z) + (z^2 - \nu^2)W(z) = 0 \tag{8.20}$$
где $z = x\sqrt{\lambda}$. Уравнение (8.20) является уравнением Бесселя. Отсюда следует, что общий вид решения уравнения (8.19), удовлетворяющего условию $\frac{u(x)}{x^{\nu}} \in C^2[0,l]$ имеет вид
$$u(x) = AJ_{\nu}(x\sqrt{\lambda}),$$
где A – произвольная постоянная. Из условия $u(l) = 0$ получим, что
$$AJ_{\nu}(l\sqrt{\lambda}) = 0. \tag{8.21}$$
Легко видеть, что решение уравнения (8.21) имеет вид
$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2,\ n \in \mathbb{N}.$$
Отсюда следует утверждение теоремы. □

Теорема 8.54 (Основное свойство собственных функции сингулярной задачи Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на конечном интервале)**.** *Пусть*

- $\nu \geqslant 0,\ l > 0$;
- $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *положительные нули функции Бесселя* J_{ν}.

Тогда семейство функций
$$\left\{J_{\nu}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{8.22}$$
образует ортогональный базис в $L_2((0,l);x)$.

Доказательство. Из симметричности оператора, отвечающего уравнению Бесселя на конечном интервале, следует, что семейство (8.22) является ортогональным в $L_2((0,l);x)$.

Полноту семейства (8.22) в $L_2((0,l);x)$ оставим без доказательства. □

9. Метод разделения переменных

9.1. Основные идеи метода разделения переменных.

Определение 9.1 (Основные идеи метода разделения переменных для решения задачи на собственные значения и функции эллиптического оператора)**.** *Пусть*

- U – *открытое ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- V – *открытое ограниченное множество в* $\mathbb{R}^m$, *где* $m \in \mathbb{N}$;
- $\mathcal{A}$ – *симметричный эллиптический оператор в* $L_2(U)$ *с областью определения* $\operatorname{Dom}\mathcal{A}$;
- $\mathcal{B}$ – *симметричный эллиптический оператор в* $L_2(V)$ *с областью определения* $\operatorname{Dom}\mathcal{B}$;
- $\mathcal{L}$ – *симметричный эллиптический оператор в* $L_2(U \times V)$ *с областью определения* $\operatorname{Dom}\mathcal{L}$;
- *оператор* $\mathcal{L}$, *обладает следующими свойствами*
  - $\forall\ X \in \operatorname{Dom}\mathcal{A}\ \forall\ Y \in \operatorname{Dom}\mathcal{B}\quad X(x)Y(y) \in \operatorname{Dom}\mathcal{L}$,
  - $\forall\ X \in \operatorname{Dom}\mathcal{A}\ \forall\ Y \in \operatorname{Dom}\mathcal{B}\quad \mathcal{L}\big(X(x)Y(y)\big) = Y(y)\mathcal{A}X(x) + X(x)\mathcal{B}Y(y)$.

Тогда методом разделения переменных для решения задачи на собственные значения и функции вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u, \\ u \in \operatorname{Dom}(\mathcal{L}) \end{cases} \tag{9.1}$$

называют следующую последовательность действий.

(1) *Решение вспомогательных задач на собственные значения и функции вида*

$$\begin{cases} \mathcal{A}X = \nu X, \\ X \in \operatorname{Dom}(\mathcal{A}), \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{B}Y = \mu Y, \\ Y \in \operatorname{Dom}(\mathcal{B}). \end{cases}$$

(2) *Описание всех специальных решений задачи* (9.1) *вида* $u(x, y) = X(x)Y(y)$. *Другими словами, необходимо проверить следующее утверждение.*
  - *Если* $\mathcal{A}X = \nu X$ *и* $\mathcal{B}Y = \mu Y$, *то* $\mathcal{L}u = \lambda u$, *где* $u(x, y) = X(x)Y(y)$ *и* $\lambda = \nu + \mu$.

(3) *Если это возможно, необходимо доказать (или опровергнуть), что множество всех решений задачи* (9.1) *вида* $u(x, y) = X(x)Y(y)$ *плотно в* $L_2(U \times V)$.

(4) *В том случае, если удалось доказать, что множество всех решений задачи* (9.1) *вида* $u(x, y) = X(x)Y(y)$ *плотно в* $L_2(U \times V)$, *делаем вывод о том, что найдены все собственные значения и функции оператора* $\mathcal{L}$.

Определение 9.2 (Основные идеи метода Фурье для решения краевых задач для эллиптических операторов)**.** *Пусть*

- U – *открытое ограниченное множество в* $\mathbb{R}^d$, *где* $d \in \mathbb{N}$;
- $\mathcal{L}$ – *симметричный эллиптический оператор в* $L_2(U)$ *с областью определения* $\operatorname{Dom}\mathcal{L}$;
- $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \mathcal{L}u_n = \lambda_n u_n$;
- $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *ортогональный базис в* $L_2(U)$;
- $f \in L_2(U)$.

Тогда методом Фурье для решения краевой задачи вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ u \in \operatorname{Dom}(\mathcal{L}) \end{cases} \tag{9.2}$$

называют следующую последовательность действий.

(1) *Разложение функции f в ряд по собственным функциям оператора $\mathcal{L}$*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x), \quad f_n = \frac{(f, u_n)}{\|u_n\|^2},$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(U)$.

(2) *Поиск решения задачи (9.2) вида*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) \tag{9.3}$$

(в частности, проверка соотношения $c_n\lambda_n = f_n$, где $n \in \mathbb{N}$).

(3) *Если удалось построить решение задачи (9.2) вида (9.3), необходимо проверить принадлежность полученного решения области определения оператора $\mathcal{L}$ (в частности, необходимо проверить, что ряд (9.3) сходится).*

Определение 9.3 (Основные идеи метода Фурье для решения смешанных задач для параболических уравнений)**.** *Пусть*

- *U – открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$, где $d \in \mathbb{N}$;*
- *$\mathcal{L}$ – симметричный эллиптический оператор в $L_2(U)$ с областью определения* $\operatorname{Dom}\mathcal{L}$*;*
- *$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \mathcal{L}u_n = \lambda_n u_n$;*
- *$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортогональный базис в $L_2(U)$;*
- *$\varphi \in L_2(U)$, $f \in L_2(U \times (0,+\infty))$.*

Тогда методом Фурье для решения смешанной задачи вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathcal{L}_x u(x,t) + f(x,t), \\ u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \\ u \in \mathcal{H}, \end{cases} \tag{9.4}$$

где $\mathcal{L}_x$ – оператор $\mathcal{L}$ действующей по переменной x и $\mathcal{H}$ – некоторый класс функций, которому должно принадлежать решение задачи, называют следующую последовательность действий.

(1) *Разложение функций f и φ в ряд по собственным функциям оператора $\mathcal{L}$*

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) u_n(x), \quad f_n(t) = \frac{(f, u_n)}{\|u_n\|^2}, \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(x), \quad \varphi_n = \frac{(\varphi, u_n)}{\|u_n\|^2},$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(U)$.

(2) *Поиск решения задачи (9.4) вида*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) u_n(x). \tag{9.5}$$

В частности, проверка, что коэффициенты c_n являются решением задачи Коши вида

$$\begin{cases} c_n'(t) - \lambda_n c_n(t) = f_n(t), \\ c_n(t)|_{t=0} = \varphi_n, \end{cases} \tag{9.6}$$

где $n \in \mathbb{N}$.

(3) *Построение решений всех задач (9.6).*

(4) *Если удалось построить решение задачи (9.4) вида (9.5), необходимо проверить принадлежность полученного решения требуемому классу $\mathcal{H}$.*

Определение 9.4 (Основные идеи метода Фурье для решения смешанных задач для гиперболических уравнений). *Пусть*

- U – *открытое ограниченное множество в* $\mathbb{R}^d$, *где* $d \in \mathbb{N}$;
- $\mathcal{L}$ – *симметричный эллиптический оператор в* $L_2(U)$ *с областью определения* $\operatorname{Dom}\mathcal{L}$;
- $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \mathcal{L}u_n = \lambda_n u_n$;
- $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *ортогональный базис в* $L_2(U)$;
- $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathcal{L}_x$ – *гиперболический оператор в* $L_2(U \times (0, +\infty))$, *где* $\mathcal{L}_x$ – *оператор* $\mathcal{L}$ *действующей по переменной* x;
- $\varphi \in L_2(U)$, $\psi \in L_2(U)$, $f \in L_2(U \times (0, +\infty))$.

Тогда методом Фурье для решения смешанной задачи вида

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \mathcal{L}_x u(x,t) + f(x,t), \\ u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \\ u \in \mathcal{H}, \end{cases} \tag{9.7}$$

где $\mathcal{H}$ – *некоторый класс функций, которому должно принадлежать решение задачи, называют следующую последовательность действий.*

(1) *Разложение функций* f, φ *и* ψ *в ряд по собственным функциям оператора* $\mathcal{L}$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) u_n(x), \quad f_n(t) = \frac{(f, u_n)}{\|u_n\|^2},$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(x), \quad \varphi_n = \frac{(\varphi, u_n)}{\|u_n\|^2}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n u_n(x), \quad \psi_n = \frac{(\psi, u_n)}{\|u_n\|^2},$$

где $(\cdot,\cdot)$ – *скалярное произведение в* $L_2(U)$.

(2) *Поиск решения задачи* (9.7) *вида*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) u_n(x). \tag{9.8}$$

В частности, проверка, что коэффициенты c_n *являются решением задачи Коши вида*

$$\begin{cases} c_n''(t) - \lambda_n c_n(t) = f_n(t), \\ c_n(t)|_{t=0} = \varphi_n, \ c_n'(t)|_{t=0} = \psi_n, \end{cases} \tag{9.9}$$

где $n \in \mathbb{N}$.

(3) *Построение решений всех задач* (9.9).

(4) *Если удалось построить решение задачи* (9.7) *вида* (9.8), *необходимо проверить принадлежность полученного решения требуемому классу* $\mathcal{H}$.

9.2. Некоторые сведения о пространствах Соболева.

Определение 9.5 (Пространство основных функций $D(\Omega)$). *Пусть*

- Ω – *открытое множество в* $\mathbb{R}^d$, *где* $d \in \mathbb{N}$;
- *функция* $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ *удовлетворяет условиям*
  - **бесконечная дифференцируемость:** $\varphi \in C^{\infty}(\Omega)$;
  - **финитность носителя в** Ω**:** *существует компакт* $K \subset \Omega$ *такой, что* $\operatorname{supp}\varphi \subset K$.

Тогда

(1) *функцию φ называют основной функцией на множестве Ω;*
(2) *множество всех основных функций на Ω обозначают $D(\Omega)$.*

Определение 9.6 (Сходимость в смысле $D(\Omega)$)**.** *Пусть*

- *Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^d$, где $d \in \mathbb{N}$;*

Говорят, что последовательность основных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится при $n \to \infty$ к функции φ в смысле $D(\Omega)$, и пишут

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D(\Omega)} \varphi,$$

если

(1) *существует компакт K такой, что $K \subset \Omega$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$;*
(2) *для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ последовательность функций $\{D^\alpha \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится при $n \to \infty$ к функции $D^\alpha \varphi$ равномерно на K.*

Определение 9.7 (Пространство обобщенных функций $D'(\Omega)$)**.** *Пусть*

- *Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^d$, где $d \in \mathbb{N}$;*
- *отображение*

$$f : D(\Omega) \ni \varphi \longmapsto (f, \varphi) \in \mathbb{C}$$

удовлетворяет условиям

– **линейность:** *для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega)$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ верно, что*

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2);$$

– **непрерывность:** *для любой последовательности основных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D(\Omega)} 0$ верно, что $\lim\limits_{n\to\infty} (f, \varphi_n) = 0$.*

Тогда

(1) *отображение f называют обобщенной функцией;*
(2) *множество всех обобщенных функций называют пространством обобщенных функций, которое обозначают $D'(\Omega)$.*

Определение 9.8 ($L_2(\Omega)$ как подпространство $D'(\Omega)$)**.** *Пусть*

- *Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^d$, где $d \in \mathbb{N}$;*
- *$u \in D'(\Omega)$.*

Говорят, что $u \in L_2(\Omega)$, если u – регулярная обобщенная функция с ядром $U \in L_2(\Omega)$. Другими словами,

$$\int\limits_{\Omega} |U(x)|^2 \, dx < \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Теорема 9.9 (Эквивалентное определение $L_2(\Omega)$ (через ряды Фурье))**.** *Пусть*

- *Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^d$, где $d \in \mathbb{N}$;*
- *$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис $L_2(\Omega)$.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны

(1) *$u \in L_2(\Omega)$;*

(2) u – *обобщенная функция вида*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$$

или, в подробной записи,

$$\forall\ \varphi \in D(\Omega) \quad (u, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (u_n, \varphi),$$

где $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность в* $\mathbb{C}$, *удовлетворяющая условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty. \tag{9.10}$$

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Из условия $u \in L_2(\Omega)$ следует, что ядро U может быть разложена в ряд вида

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n,$$

который сходится в смысле нормы в $L_2(\Omega)$. Отсюда и из равенства Парсеваля следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|U\|^2 < \infty.$$

Наконец, заметим, что для любого $\varphi \in D(\Omega)$ верно, что

$$(u, \varphi) = \int\limits_{\Omega} U(x)\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)\varphi(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int\limits_{\Omega} u_n(x)\varphi(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (u_n, \varphi).$$

(2) $\Longrightarrow$ (1). Рассмотрим вспомогательную последовательность

$$g_N = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n.$$

Из условия (9.10) следует, что существует предел

$$\lim_{N\to\infty} g_N = g$$

в смысле сходимости в $L_2(\Omega)$, причем $g \in L_2(\Omega)$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что $g = u$. Легко видеть, что

$$\forall\ \varphi \in D(\Omega) \quad (g, \varphi) = \int_{\Omega} g(x)\varphi(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_{\Omega} g_N(x)\varphi(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n \int_{\Omega} u_n(x)\varphi(x)\, dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n (u_n, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (u_n, \varphi) = (u, \varphi). \ \square$$

Определение 9.10 (Пространство Соболева $H^p(\Omega)$)**.** *Пусть*

- Ω *– открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^d$, *где* $d \in \mathbb{N}$;
- $p \in \mathbb{N}$.

Тогда

(1) $H^p(\Omega) = \big\{u \;\big|\; u \in D'(\Omega),\ \forall\ |\alpha| \leqslant p \quad D^\alpha u \in L_2(\Omega)\big\}$;
(2) $\|u\|_{H^p(\Omega)} = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant p} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$.

Теорема 9.11 (След функции из $H^1(\Omega)$ на границе области Ω)**.** *Пусть*

- Ω – *открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^d$, *где* $d \in \mathbb{N}$;
- $\partial\Omega \in C^1$, *где* $\partial\Omega$ – *граница области* Ω.

Тогда

(1) *любая функция* $u \in H^1(\Omega)$ *имеет след* $u|_{\partial\Omega}$ *на границе* $\partial\Omega$, *причем* $u|_{\partial\Omega} \in L_2(\partial\Omega)$;
(2) *существует* $C > 0$, *не зависящая от* u, *такая, что* $\|u|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant C\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Доказательство. Без доказательства. □

Определение 9.12 (Пространство Соболева $H^{2,1}(\Omega_T)$)**.** *Пусть*

- Ω – *открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^d$, *где* $d \in \mathbb{N}$;
- $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, *где* $T > 0$.

Тогда

$$H^{2,1}(\Omega_T) = \left\{u \;\middle|\; u \in D'(\Omega_T),\ \partial_t u \in L_2(\Omega_T),\ \forall\ |\alpha| \leqslant 2\ D_x^\alpha u \in L_2(\Omega_T)\right\}.$$

Теорема 9.13 (Вложение пространства Соболева в пространство гладких функций)**.** *Пусть*

- Ω – *открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^d$, *где* $d \in \mathbb{N}$;
- $p \in \mathbb{Z}_+$;
- $\partial\Omega \in C^{p+1+[d/2]}$.

Тогда

$$H^{p+1+[d/2]}(\Omega) \subset C^p(\overline{\Omega}).$$

Доказательство. Без доказательства. □

9.3. **Уравнение Пуассона в прямоугольнике.**

Теорема 9.14 (Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике с условиями Дирихле на границе (метод разделения переменных))**.** *Пусть*

- $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, *где* $a > 0$ *и* $b > 0$;
- $\mathcal{L} = -\Delta$, $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \big\{u \mid u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = 0\big\}$, *где* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$;
- $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \in \mathbb{N} \quad \lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$;
- $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \in \mathbb{N} \quad u_{nm}(x, y) = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right)$.

Тогда

(1) $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{L}u_{nm} = \lambda_{nm}u_{nm},\ u_{nm} \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$;
(2) *семейство функций* $\{u_{nm}\}_{n,m=1}^\infty$ *образует ортогональный базис в пространстве* $L_2(\Omega)$;
(3) $\{\lambda_{nm}\}_{n,m=1}^\infty$ – *полный набор собственных чисел оператора* $\mathcal{L}$.
(4) $\{u_{nm}\}_{n,m=1}^\infty$ – *полный набор собственных функций оператора* $\mathcal{L}$;

Доказательство. (1) Доказательство проведем методом разделения переменных. Для этого будем искать специальные решения задачи

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \tag{9.11}$$

вида

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \tag{9.12}$$

Подставляя (9.12) в уравнение (9.11), получим

$$-X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y).$$

Отсюда, поделив на $X(x)Y(y)$, найдем

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda. \tag{9.13}$$

Поскольку левая часть в равенстве (9.13) зависит только от переменной x, а правая только от y, то оба отношения равны некоторой постоянной, которую мы обозначим через μ. В результате, уравнения на функции X и Y разделились

$$-X''(x) = \mu X(x), \tag{9.14}$$

$$-Y''(y) = \nu Y(y), \tag{9.15}$$

где $\nu = \lambda - \mu$ или, что тоже самое $\lambda = \nu + \mu$.

Из условия $u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$, получим

$$\begin{cases} X(0)Y(y) = 0 & \text{при} \quad y \in [0, b], \\ X(a)Y(y) = 0 & \text{при} \quad y \in [0, b], \\ X(x)Y(0) = 0 & \text{при} \quad x \in [0, a], \\ X(x)Y(b) = 0 & \text{при} \quad x \in [0, a]. \end{cases} \tag{9.16}$$

Напомним, что мы ищем нетривиальные решения задачи (9.11), поэтому мы должны предполагать, что функции $X(x)$ и $Y(y)$ не являются тождественно равными нулю. Отсюда и из (9.16) следует, что

$$X(0) = X(a) = 0, \tag{9.17}$$

$$Y(0) = Y(b) = 0. \tag{9.18}$$

Собирая уравнения (9.14), (9.15) и краевые условия (9.17), (9.18) вместе, получим две задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -X''(x) = \mu X(x), \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases} \tag{9.19}$$

$$\begin{cases} -Y''(y) = \nu Y(y), \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases} \tag{9.20}$$

Собственные функции и собственные значения задач (9.19) и (9.20) имеют вид

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right), \ \mu_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \ n \in \mathbb{N}, \tag{9.21}$$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right), \ \nu_m = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \ m \in \mathbb{N}. \tag{9.22}$$

Подставляя (9.21) и (9.22) в представление (9.12), найдем собственные функции и собственные значения задачи (9.11) вида

$$u_{nm}(x, y) = X_n(x)Y_m(y) = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right),$$

$$\lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \ n \in \mathbb{N}, \ m \in \mathbb{N}.$$

(2) Напомним, что пространство $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$. Поэтому достаточно доказать, что для любая функция $f \in C_0^\infty(\Omega)$ может быть разложена в ряд

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}u_{nm}(x,y),$$

сходящийся в смысле $L_2(\Omega)$.

Фиксируем переменную y и будем рассматривать $f(x,y)$ как функцию от x. Эта функция принадлежит $C_0^\infty(0,a)$ и может быть разложена по собственным функциям X_n задачи Штурма-Лиувилля (9.19). Следовательно, существуют такие $c_n(y)$, что

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y)X_n(x). \tag{9.23}$$

При этом легко видеть, что $c_n \in C_0^\infty(0,b)$ при $n \in \mathbb{N}$.

Аналогично, функции $c_n(y)$ могут быть разложены по собственным функциям Y_p задачи Штурма-Лиувилля (9.20)

$$c_n(y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}\,Y_m(y). \tag{9.24}$$

Подставляя (9.24) в (9.23), получим

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}\,X_n(x)Y_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}\,u_{nm}(x,y).$$

(3) Заметим, что

$$\forall\ u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})\ \forall\ v \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \quad (\mathcal{L}u, v) = -\iint\limits_{\Omega} \Delta u(x,y)\overline{v(x,y)}\,dx\,dy =$$
$$= -\iint\limits_{\Omega} u(x,y)\overline{\Delta v(x,y)}\,dx\,dy = (u, \mathcal{L}v)$$

и, следовательно, оператор $\mathcal{L}$ симметричен в $L_2(\Omega)$

Дальнейшее доказательство проведем от противного. Пусть теперь e – собственная функция оператора $\mathcal{L}$ отвечающая собственному значению λ_0, которое не принадлежит множеству $\{\lambda_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$. Из симметричности оператора $\mathcal{L}$ следует, что

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \in \mathbb{N} \quad \lambda_0(e, u_{nm}) = (\mathcal{L}e, u_{nm}) = (e, \mathcal{L}u_{nm}) = \lambda_{nm}(e, u_{nm}).$$

Отсюда, учитывая, что $\lambda_0 \neq \lambda_{nm}$, получим

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \in \mathbb{N} \quad (e, u_{nm}) = 0.$$

Отсюда и из (2) следует, что $e \equiv 0$.

(4) Следует из (2). □

Теорема 9.15 (Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике (метод Фурье))**.** *Пусть*

- $\Omega = (0,a) \times (0,b)$, *где* $a > 0$ *и* $b > 0$*;*
- $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \in \mathbb{N} \quad \lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$*;*

- $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, m \in \mathbb{N} \quad u_{nm}(x,y) = \frac{\hat{u}_{nm}(x,y)}{\|\hat{u}_{nm}\|}$, *где* $\hat{u}_{nm}(x,y) = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right)$ *и*

$$\|\hat{u}_{nm}\|^2 = \iint\limits_{\Omega} |\hat{u}_{nm}(x,y)|^2\,dx\,dy = \frac{ab}{4};$$

- $\mathcal{L} = -\Delta$,

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \left\{ u \;\middle|\; u \in D'(\Omega),\ u(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm}u_{nm}(x,y),\ \ \sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_{nm}^2 |c_{nm}|^2 < \infty \right\};$$

- $f \in L_2(\Omega)$.

Тогда

(1) *существует единственное решение задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}); \end{cases} \tag{9.25}$$

(2) *решение задачи* (9.25) *может быть представлено в виде*

$$u(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm}u_{nm}(x,y),$$

где

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, m \in \mathbb{N} \quad c_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}},\ \ f_{nm} = (f, u_{nm})$$

и $(\cdot,\cdot)$ – *скалярное произведение в* $L_2(\Omega)$*;*

(3) $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \left\{ u \;\middle|\; u \in H^2(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$.

Доказательство. (1, 2) Из условия $f \in L_2(\Omega)$ следует, что f может быть разложена в ряд Фурье вида

$$f(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_{nm}u_{nm}(x,y), \tag{9.26}$$

причем

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |f_{nm}|^2 < \infty. \tag{9.27}$$

Решение задачи (9.25) будем искать в виде

$$u(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm}u_{nm}(x,y). \tag{9.28}$$

Легко видеть, что

$$\forall\, \varphi \in D(\Omega) \quad (\mathcal{L}u, \varphi) = (-\Delta u, \varphi) = (u, -\Delta\varphi) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm}(u_{nm}, -\Delta\varphi) =$$

$$= \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm}(-\Delta u_{nm}, \varphi) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_{nm}c_{nm}(u_{nm}, \varphi).$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}u = \sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_{nm} c_{nm} u_{nm}.$$

Подставляя (9.26) и (9.28) в уравнение $\mathcal{L}u = f$, получим

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_{nm} c_{nm} u_{nm} = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_{nm} u_{nm}.$$

Учитывая, что $\{u_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$ – ортогональный базис в $L_2(\Omega)$, отсюда получим, что

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, m \in \mathbb{N} \quad c_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}}.$$

Отсюда и из условия (9.27) вытекает, что

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_{nm}^2 |c_{nm}|^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} |f_{nm}|^2 = \|f\|^2_{L_2(\Omega)} < \infty.$$

Единственность решения доказывается аналогичным образом.

(3) Докажем, что $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \subset H^2(\Omega)$. Пусть $u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$. Легко видеть, что

$$\forall\, \varphi \in D(\Omega) \quad \forall\, |\alpha| \leqslant 2 \quad (D^\alpha u, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(u, D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm}(u_{nm}, D^\alpha \varphi) =$$

$$= \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm}(D^\alpha u_{nm}, \varphi) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{a}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\pi m}{b}\right)^{\alpha_2} c_{nm}(u_{nm}, \varphi).$$

Следовательно,

$$\forall\, |\alpha| \leqslant 2 \quad \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2\alpha_1} \left(\frac{\pi m}{b}\right)^{2\alpha_2} |c_{nm}|^2 \leqslant \sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_{nm}^2 |c_{nm}|^2 \leqslant \|f\|^2_{L_2(\Omega)} < \infty.$$

Равенство $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \left\{u \;\middle|\; u \in H^2(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0\right\}$ оставим без доказательства. $\square$

Теорема 9.16 (Обобщенное решение задачи Неймана для уравнения Пуассона в прямоугольнике (метод Фурье))**.** *Пусть*

- $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, *где* $a > 0$ *и* $b > 0$*;*
- $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+\ \forall\, m \in \mathbb{Z}_+ \quad \lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$*;*
- $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+\ \forall\, m \in \mathbb{Z}_+ \quad u_{nm}(x, y) = \frac{\hat{u}_{nm}(x,y)}{\|\hat{u}_{nm}\|}$, *где* $\hat{u}_{nm}(x, y) = \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right)$ *и*

$$\|\hat{u}_{nm}\|^2 = \iint\limits_{\Omega} |\hat{u}_{nm}(x, y)|^2\, dx\, dy = \frac{ab}{4};$$

- $\mathcal{L} = -\Delta$,

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \left\{u \;\middle|\; u \in D'(\Omega),\ u(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm} u_{nm}(x, y),\ \sum_{n,m=0}^{\infty} \lambda_{nm}^2 |c_{nm}|^2 < \infty,\ c_{00} = 0\right\};$$

- $f \in L_2(\Omega)$.

Тогда

(1) *для разрешимости задачи Неймана*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}); \end{cases} \tag{9.29}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = 0;$$

(2) *решение задачи* (9.29) *единственно и может быть представлено в виде*

$$u(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm} u_{nm}(x,y),$$

где $c_{00} = 0$,

$$\forall\ (n,m) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus (0,0) \qquad c_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}},\ f_{nm} = (f, u_{nm})$$

и $(\cdot,\cdot)$ *– скалярное произведение в* $L_2(\Omega)$;

(3) $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \big\{u \bigm| u \in H^2(\Omega),\ \partial_n u|_{\partial\Omega} = 0\big\}$.

Доказательство. Самостоятельно. □

9.4. **Уравнение Пуассона в круге.**

Теорема 9.17 (Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в круге с условиями Дирихле на границе (метод разделения переменных))**.** *Пусть*

- $\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < \rho^2\}$, *где* $\rho > 0$;
- $\mathcal{L} = -\Delta$, $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \big\{u \mid u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = 0\big\}$, *где* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$;
- (r,φ) *– полярные координаты в* Ω *(*$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$*)*;
- $\forall\ n \in \mathbb{Z}\ \forall\ m \in \mathbb{N}\quad \lambda_{nm} = \left(\frac{\mu_{nm}}{\rho}\right)^2$, *где* μ_{nm} *– положительные нули функции Бесселя* J_n;
- $\forall\ n \in \mathbb{Z}\ \forall\ m \in \mathbb{N}\quad u_{nm}(x,y) = J_n\left(\frac{\mu_{nm} r}{\rho}\right) e^{in\varphi}$.

Тогда

(1) $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \in \mathbb{N}\quad \mathcal{L}u_{nm} = \lambda_{nm}u_{nm},\ u_{nm} \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$;
(2) *семейство функций* $\{u_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$ *образует ортогональный базис в пространстве* $L_2(\Omega)$;
(3) $\{\lambda_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$ *– полный набор собственных чисел оператора* $\mathcal{L}$.
(4) $\{u_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$ *– полный набор собственных функций оператора* $\mathcal{L}$;

Доказательство. (1) Доказательство проведем методом разделения переменных. Для этого будем искать специальные решения задачи

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \tag{9.30}$$

вида

$$u(x,y) = R(r)\Phi(\varphi). \tag{9.31}$$

Напомним, что

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\,.$$

Подставляя (9.31) в уравнение (9.30), получим

$$-\frac{1}{r}(rR'(r))'\Phi(\varphi)-\frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi)=\lambda R(r)\Phi(\varphi).$$

Отсюда, умножая на $\frac{r^2}{R(r)\Phi(\varphi)}$, найдем

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\frac{r(rR'(r))'}{R(r)}+\lambda r^2. \tag{9.32}$$

Поскольку левая часть в равенстве (9.32) зависит только от переменной φ, а правая только от r, то оба отношения равны некоторой постоянной, которую мы обозначим через ν. В результате, уравнения на функции Φ и R разделились

$$-\Phi''(\varphi)=\nu\Phi(\varphi), \tag{9.33}$$

$$r(rR'(r))'+\lambda r^2R(r)=\nu R(r). \tag{9.34}$$

Из условия $u\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L})$, получим, что Φ – 2π-периодическая функция, R – ограничена в окрестности точки $r=0$ и $R(\rho)=0$. Отсюда следует, что

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi), \tag{9.35}$$

$$|R(0)|<\infty,\ R(\rho)=0. \tag{9.36}$$

Собирая уравнения (9.33), (9.34) и краевые условия (9.35), (9.36) вместе, получим две задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases}-\Phi''(\varphi)=\nu\Phi(\varphi),\\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi),\end{cases} \tag{9.37}$$

$$\begin{cases}r(rR'(r))'+(\lambda r^2-\nu)R(r)=0,\\ |R(0)|<\infty,\ R(\rho)=0.\end{cases} \tag{9.38}$$

Собственные функции и собственные значения задачи (9.37) имеют вид

$$\Phi_n(x)=e^{in\varphi},\ \nu_n=n^2,\ n\in\mathbb{Z}. \tag{9.39}$$

Собственные функции и собственные значения задачи (9.38) при $\nu=n^2$ имеют вид (см. теорему 8.53 (собственные значения и собственные функции сингулярной задачи Штурма-Лиувиллия для уравнения Бесселя на конечном интервале))

$$R_{nm}(r)=J_n\left(\frac{\mu_{nm}r}{\rho}\right),\ \lambda_{nm}=\left(\frac{\mu_{nm}}{\rho}\right)^2,\ m\in\mathbb{N}. \tag{9.40}$$

Подставляя (9.39) и (9.40) в представление (9.31), найдем собственные функции и собственные значения задачи (9.30) вида

$$u_{nm}(x,y)=R_{nm}(r)\Phi_n(\varphi)=J_n\left(\frac{\mu_{nm}r}{\rho}\right)e^{in\varphi},\quad \lambda_{nm}=\left(\frac{\mu_{nm}}{\rho}\right)^2,\ n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N}.$$

(2 – 4) Доказывается также как и аналогичные пункты теоремы 9.14. □

Теорема 9.18 (Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в круге (метод Фурье)). *Пусть*

- $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2<\rho^2\}$, *где* $\rho>0$;
- (r,φ) *– полярные координаты в* Ω $(x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi)$;
- $\forall\ n\in\mathbb{Z}\ \forall\ m\in\mathbb{N}\quad \lambda_{nm}=\left(\frac{\mu_{nm}}{\rho}\right)^2$, *где* μ_{nm} *– положительные нули функции Бесселя* J_n;

- $\forall\ n \in \mathbb{Z}\ \forall\ m \in \mathbb{N} \quad u_{nm}(x,y) = \frac{\hat{u}_{nm}(x,y)}{\|\hat{u}_{nm}\|}$, *где* $\hat{u}_{nm}(x,y) = J_n\left(\frac{\mu_{nm} r}{\rho}\right) e^{in\varphi}$ *и*
$$\|\hat{u}_{nm}\|^2 = \iint\limits_{\Omega} |\hat{u}_{nm}(x,y)|^2\,dx\,dy = 2\pi \int\limits_0^{\rho} \left| r J_n\left(\frac{\mu_{nm} r}{\rho}\right)\right|^2 dr;$$
- $\mathcal{L} = -\Delta$,
$$\operatorname{Dom}(\mathcal{L}) = \left\{ u \;\middle|\; u \in D'(\Omega),\ u(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm} u_{nm}(x,y),\ \sum_{n,m=0}^{\infty} \lambda_{nm}^2 |c_{nm}|^2 < \infty \right\};$$
- $f \in L_2(\Omega)$.

Тогда

(1) *существует единственное решение задачи Дирихле*
$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ u \in \operatorname{Dom}(\mathcal{L}); \end{cases} \tag{9.41}$$
(2) *решение задачи* (9.41) *может быть представлено в виде*
$$u(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm} u_{nm}(x,y),$$
где
$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \in \mathbb{N} \quad c_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}},\ f_{nm} = (f, u_{nm})$$
и $(\cdot,\cdot)$ *– скалярное произведение в* $L_2(\Omega)$*;*

(3) $\operatorname{Dom}(\mathcal{L}) = \{ u \mid u \in H^2(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0 \}$.

Доказательство. Практически дословно повторяет доказательство теоремы 9.15. □

9.5. Уравнение Пуассона в шаре в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 9.19 (Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в шаре в $\mathbb{R}^3$ с условиями Дирихле на границе (метод разделения переменных))**.** *Пусть*

- $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < \rho^2\}$, *где* $\rho > 0$*;*
- $\mathcal{L} = -\Delta$, $\operatorname{Dom}(\mathcal{L}) = \{ u \mid u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$, *где* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$*;*
- (r,φ,θ) *– сферические координаты в* Ω *(*$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$*);*
- $\lambda_{nk} = \left(\frac{\mu_{nk}}{\rho}\right)^2$, *где* $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$ *и* μ_{nk} *– положительные нули функции Бесселя* $J_{|n+\frac{1}{2}|}$*;*
- $u_{nmk}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{|n+\frac{1}{2}|}\left(\frac{\mu_{nk} r}{\rho}\right) e^{im\varphi} P_n^{|m|}(\cos\theta)$, *где* $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{m \mid m \in \mathbb{Z}, |m| \leqslant n\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Тогда

(1) $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+,\ \forall\ m \in \{m \mid m \in \mathbb{Z}, |m| \leqslant n\},\ \forall\ k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{L}u_{nmk} = \lambda_{nk} u_{nmk},\ u_{nmk} \in \operatorname{Dom}(\mathcal{L})$*;*
(2) *семейство функций* $\{u_{nmk}\}$ *образует ортогональный базис в пространстве* $L_2(\Omega)$*;*
(3) $\{\lambda_{nk}\}$ *– полный набор собственных чисел оператора* $\mathcal{L}$*.*
(4) $\{u_{nmk}\}$ *– полный набор собственных функций оператора* $\mathcal{L}$*;*

Доказательство. (1) Доказательство проведем методом разделения переменных. Для этого будем искать специальные решения задачи

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \tag{9.42}$$

вида

$$u(x,y) = R(r)Y(\theta,\varphi). \tag{9.43}$$

Напомним, что

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\,.$$

Подставляя (9.43) в уравнение (9.42), получим

$$-\frac{1}{r^2}(r^2R'(r))'Y(\theta,\varphi) - \frac{1}{r^2}R(r)\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi) = \lambda R(r)Y(\theta,\varphi).$$

Отсюда, умножая на $\frac{r^2}{R(r)R(r)Y(\theta,\varphi)}$, найдем

$$-\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \frac{(r^2R'(r))'}{R(r)} + \lambda r^2. \tag{9.44}$$

Поскольку левая часть в равенстве (9.44) зависит только от переменных θ и φ, а правая только от r, то оба отношения равны некоторой постоянной, которую мы обозначим через ν. В результате, уравнения на функции Y и R разделились

$$-\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi) = \nu Y(\theta,\varphi), \tag{9.45}$$

$$(r^2R'(r))' + \lambda r^2R(r) = \nu R(r). \tag{9.46}$$

Из условия $u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$, получим, что Y – гладкая функция на сфере, R – ограничена в окрестности точки $r = 0$ и $R(\rho) = 0$. Отсюда следует, что

$$Y(\theta,\varphi+2\pi) = Y(\theta,\varphi),\ |Y(0,\varphi)| < \infty,\ |Y(\pi,\varphi)| < \infty, \tag{9.47}$$

$$|R(0)| < \infty,\ R(\rho) = 0. \tag{9.48}$$

Собирая уравнения (9.45), (9.46) и краевые условия (9.47), (9.48) вместе, получим две задачи на спектральные значения

$$\begin{cases} -\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi) = \nu Y(\theta,\varphi), \\ Y(\theta,\varphi+2\pi) = Y(\theta,\varphi),\ |Y(0,\varphi)| < \infty,\ |Y(\pi,\varphi)| < \infty, \end{cases} \tag{9.49}$$

$$\begin{cases} (r^2R'(r))' + (\lambda r^2 - \nu)R(r) = 0, \\ |R(0)| < \infty,\ R(\rho) = 0. \end{cases} \tag{9.50}$$

Собственные функции и собственные значения задачи (9.49) имеют вид (см. теорему 8.27) (собственные функции и собственные числа оператора Лапласа-Бельтрами))

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}P_n^{|m|}(\cos\theta),\ \nu_n = n(n+1),\ n \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \{m \mid m \in \mathbb{Z}, |m| \leqslant n\}. \tag{9.51}$$

Для решения задачи (9.50), сделаем подстановку

$$R(r) = \frac{\Psi(r)}{\sqrt{r}}$$

в уравнении (9.50) при $\nu = n(n+1)$. В результате получим, что Ψ удовлетворяет уравнению

$$r^2\Psi''(r) + r\Psi'(r) + \left[\lambda r^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right]R(r) = 0.$$

Таким образом, собственные функции и собственные значения задачи (9.50) при $\nu = n(n+1)$ имеют вид (см. теорему 8.53 (собственные значения и собственные функции сингулярной задачи Штурма-Лиувиллия для уравнения Бесселя на конечном интервале))

$$R_{nk}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\, J_{|n+\frac{1}{2}|}\left(\frac{\mu_{nk} r}{\rho}\right),\ \lambda_{nk} = \left(\frac{\mu_{nk}}{\rho}\right)^2,\ n \in \mathbb{Z}_+,\ k \in \mathbb{N}. \tag{9.52}$$

Подставляя (9.51) и (9.52) в представление (9.43), найдем собственные функции и собственные значения задачи (9.42) вида

$$u_{nmk}(x,y) = R_{nk}(r) Y_n^m(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}}\, J_{|n+\frac{1}{2}|}\left(\frac{\mu_{nk} r}{\rho}\right) e^{im\varphi} P_n^{|m|}(\cos\theta), \quad \lambda_{nk} = \left(\frac{\mu_{nk}}{\rho}\right)^2,$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{m \mid m \in \mathbb{Z}, |m| \leqslant n\}$, $k \in \mathbb{N}$.

(2 – 4) Доказывается также как и аналогичные пункты теоремы 9.14. □

Теорема 9.20 (Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре в $\mathbb{R}^3$ (метод Фурье))**.** *Пусть*

- $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 < \rho^2\}$, *где* $\rho > 0$;
- (r,φ,θ) – *сферические координаты в* Ω *(*$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$*)*;
- $\lambda_{nk} = \left(\frac{\mu_{nk}}{\rho}\right)^2$, *где* $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$ *и* μ_{nk} – *положительные нули функции Бесселя* $J_{|n+\frac{1}{2}|}$;
- $u_{nmk}(x,y,z) = \frac{\hat{u}_{nm}(x,y,z)}{\|\hat{u}_{nm}\|}$, *где* $\hat{u}_{nm}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{r}}\, J_{|n+\frac{1}{2}|}\left(\frac{\mu_{nk} r}{\rho}\right) e^{im\varphi} P_n^{|m|}(\cos\theta)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{m \mid m \in \mathbb{Z},\ |m| \leqslant n\}$, $k \in \mathbb{N}$ *и*
$$\|\hat{u}_{nmk}\|^2 = \iiint\limits_{\Omega} |\hat{u}_{nm}(x,y,z)|^2\, dx\, dy\, dz;$$
- $\mathcal{L} = -\Delta$,

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \left\{ u \;\middle|\; u \in D'(\Omega),\ u = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} c_{nmk} u_{nmk},\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{nk}|^2 |c_{nmk}|^2 < \infty \right\};$$

- $f \in L_2(\Omega)$.

Тогда

(1) *существует единственное решение задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}); \end{cases} \tag{9.53}$$

(2) *решение задачи* (9.53) *может быть представлено в виде*

$$u(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} c_{nmk} u_{nmk}(x,y,z),$$

где

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+\ \forall\ m \in \{m \mid m \in \mathbb{Z},\ |m| \leqslant n\}\ \forall\ k \in \mathbb{N} \quad c_{nmk} = \frac{f_{nmk}}{\lambda_{nk}},\ f_{nmk} = (f, u_{nmk})$$

и $(\cdot,\cdot)$ – *скалярное произведение в* $L_2(\Omega)$;

(3) $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \{u \mid u \in H^2(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Доказательство. Практически дословно повторяет доказательство теоремы 9.15. □

9.6. **Уравнение теплопроводности в ограниченной области.**

Теорема 9.21 (Теорема существования и единственности решения обобщенной смешанной задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области (метод Фурье))**.** *Пусть*

- Ω – *открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^d$, *где* $d \in \mathbb{N}$;
- $\partial\Omega \in C^2$, *где* $\partial\Omega$ – *граница области* Ω;
- $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, *где* $T > 0$;
- $\mathcal{L} = -\Delta$, $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \big\{u \mid u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = 0\big\}$;
- $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{L}u_n = \lambda_n u_n$, $u_n \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$, $\lambda_n > 0$;
- $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *ортонормированный базис в пространстве* $L_2(\Omega)$;
- $f \in L_2(\Omega_T)$;
- $\varphi \in \mathcal{H}_\varphi = \left\{\varphi \;\middle|\; \varphi \in D'(\Omega),\ \varphi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(x),\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\varphi_n|^2 < \infty\right\}$;
- $\mathcal{H}_H = \left\{u \;\middle|\; u \in D'(\Omega_T),\ u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(t) u_n(x),\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|c_n\|^2_{L_2(0,T)} < \infty,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|c_n'\|^2_{L_2(0,T)} < \infty\right\}$.

Тогда

(1) *решение обобщенной смешанной задачи для уравнения теплопроводности вида*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \\ u \in \mathcal{H}_H \end{cases} \tag{9.54}$$

существует и единственно.

(2) $\mathcal{H}_\varphi = \left\{\varphi \;\middle|\; \varphi \in H^1(\Omega),\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0\right\}$;

(3) $\mathcal{H}_H = \big\{u \;\big|\; u \in H^{2,1}(\Omega_T),\ u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0\big\}$.

Доказательство. (1) Разложим функции φ и f в ряды Фурье по системе ортонормированных собственных функций $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. В результате получим, что

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(x), \quad f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) u_n(x). \tag{9.55}$$

Вмести с этим, при $n \in \mathbb{N}$ верно, что

$$\varphi_n = \int\limits_{\Omega} \varphi(x) u_n(x)\, dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^2 < \infty,$$

$$f_n(t) = \int\limits_{\Omega} f(x,t) u_n(x)\, dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^T |f_n(t)|^2\, dt < \infty.$$

Из условия теоремы следует, что решение задачи (9.54) должно представляться в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) u_n(x). \tag{9.56}$$

Подставляя разложения (9.55) и (9.56) в (9.54), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n'(t)u_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n(t)u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)u_n(x), \tag{9.57}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(x). \tag{9.58}$$

Из (9.57), (9.58) получим, что

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} c_n'(t) + \lambda_n c_n(t) = f_n(t), \\ c_n(0) = \varphi_n. \end{cases} \tag{9.59}$$

Решение задачи (9.59) существует, единственно и может быть записано в виде

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad c_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n t} + \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-\lambda_n (t-\tau)}\, d\tau.$$

Для завершения доказательства необходимо проверить, что $u \in \mathcal{H}_H$. Ради упрощения выкладок будем считать, что φ и f – вещественно-значные функции. При $n \in \mathbb{N}$ верно, что

$$c_n(t)c_n'(t) + \lambda_n c_n^2(t) = f_n(t)c_n,$$

$$\int\limits_0^T c_n(t)c_n'(t)\, dt + \lambda_n \int\limits_0^T c_n^2(t)\, dt = \int\limits_0^T f_n(t)c_n\, dt,$$

$$\frac{1}{2}c_n^2(T) - \frac{1}{2}c_n^2(0) + \lambda_n \|c_n^2\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant \|f_n\|_{L_2(0,T)} \|c_n\|_{L_2(0,T)} \leqslant \frac{1}{2\lambda_n}\|f_n\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{\lambda_n}{2}\|c_n\|^2_{L_2(0,T)},$$

$$\frac{\lambda_n}{2}\|c_n\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant \frac{1}{2\lambda_n}\|f_n\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{1}{2}\varphi_n^2,$$

$$\|c_n\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant \frac{1}{\lambda_n^2}\|f_n\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n^2.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|c_n\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^2_{L_2(0,T)} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n^2 < \infty.$$

Кроме того,

$$\|c_n'\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant 2\lambda_n^2 \|c_n\|^2_{L_2(0,T)} + 2\|f_n\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant 3\|f_n\|^2_{L_2(0,T)} + 2\lambda_n \varphi_n^2$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n'\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant 3\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^2_{L_2(0,T)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n^2 < \infty.$$

(2, 3) Без доказательства. $\square$

9.7. **Волновое уравнение в ограниченной области.**

Теорема 9.22 (Теорема существования и единственности решения обобщенной смешанной задачи для волнового уравнения в ограниченной области (метод Фурье))**.** *Пусть*

- Ω *– открытое, ограниченное множество в* $\mathbb{R}^d$*, где* $d \in \mathbb{N}$*;*
- $\partial\Omega \in C^2$*, где* $\partial\Omega$ *– граница области* Ω*;*
- $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$*, где* $T > 0$*;*
- $\mathcal{L} = -\Delta$, $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \{u \mid u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$*;*
- $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{L}u_n = \lambda_n u_n,\ u_n \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}),\ \lambda_n > 0$*;*
- $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– ортонормированный базис в пространстве* $L_2(\Omega)$*;*
- $\varphi \in \mathcal{H}_\varphi = \left\{\varphi \;\middle|\; \varphi \in D'(\Omega),\ \varphi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(x),\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\varphi_n|^2 < \infty\right\}$*;*
- $\psi \in \mathcal{H}_\psi = \left\{\varphi \;\middle|\; \psi \in D'(\Omega),\ \psi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n u_n(x),\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\psi_n|^2 < \infty\right\}$*;*
- $f \in \mathcal{H}_f = \left\{f \;\middle|\; f \in D'(\Omega_T), f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t) u_n(x), \forall\ p = 0, 1\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \|f_n^{(p)}\|^2_{L_2(0,T)} < \infty\right\}$*;*
- $\mathcal{H}_W = \left\{u \;\middle|\; u \in D'(\Omega_T),\ u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(t) u_n(x),\ \forall\ p = 0, 1, 2\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2-p} \|c_n^{(p)}\|^2_{L_2(0,T)} < \infty\right\}$.

Тогда

(1) *решение обобщенной смешанной задачи для уравнения теплопроводности вида*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \Delta_x u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega, \\ u \in \mathcal{H}_W \end{cases} \tag{9.60}$$

существует и единственно.

(2) $\mathcal{H}_\varphi = \left\{\varphi \;\middle|\; \varphi \in H^2(\Omega),\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0\right\}$;

(3) $\mathcal{H}_\psi = \left\{\psi \;\middle|\; \psi \in H^1(\Omega),\ \psi|_{\partial\Omega} = 0\right\}$;

(4) $\mathcal{H}_f = \left\{f \;\middle|\; f \in H^1(\Omega_T),\ f|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0\right\}$;

(5) $\mathcal{H}_W = \{u \mid u \in H^2(\Omega_T),\ u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0\}$.

Доказательство. (1) Разложим функции φ и f в ряды Фурье по системе ортонормированных собственных функций $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. В результате получим, что

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) u_n(x), \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(x), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n u_n(x). \tag{9.61}$$

Из условия теоремы следует, что решение задачи (9.60) должно представляться в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) u_n(x). \tag{9.62}$$

Подставляя разложения (9.61) и (9.62) в (9.60), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n''(t)u_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n(t)u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)u_n(x), \tag{9.63}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(0)u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n u_n(x). \tag{9.64}$$

Из (9.63), (9.64) получим, что

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} c_n''(t) + \lambda_n c_n(t) = f_n(t), \\ c_n(0) = \varphi_n, \\ c_n'(0) = \psi_n. \end{cases} \tag{9.65}$$

Решение задачи (9.65) существует, единственно и может быть записано в виде

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad c_n(t) = \varphi_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + \psi_n \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} + \int\limits_0^t f_n(\tau) \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\, d\tau.$$

Удобно переписать его в виде

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad c_n(t) = \alpha_n(t) + \beta_n(t) + \gamma_n(t), \tag{9.66}$$

где

$$\alpha_n(t) = \varphi_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t), \quad \beta_n(t) = \psi_n \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad \gamma_n(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau) \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\, d\tau.$$

Легко видеть, что

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \|\alpha_n\|^2_{L_2(0,T)} = |\varphi_n|^2 \int\limits_0^T \cos^2(\sqrt{\lambda_n} t)\, dt \leqslant T|\varphi_n|^2.$$

Отсюда и из условия $\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|\alpha_n\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\varphi_n|^2 < \infty.$$

Аналогично,

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \|\alpha_n'\|^2_{L_2(0,T)} = \lambda_n |\varphi_n|^2 \int\limits_0^T \sin^2(\sqrt{\lambda_n} t)\, dt \leqslant T\lambda_n |\varphi_n|^2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|\alpha_n'\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\varphi_n|^2 < \infty,$$

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \|\alpha_n''\|^2_{L_2(0,T)} = \lambda_n^2 |\varphi_n|^2 \int\limits_0^T \cos^2(\sqrt{\lambda_n} t)\, dt \leqslant T\lambda_n^2 |\varphi_n|^2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|\alpha_n''\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\varphi_n|^2 < \infty.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) u_n(x) \in \mathcal{H}_W. \tag{9.67}$$

Далее, заметим, что

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \|\beta_n\|^2_{L_2(0,T)} = \frac{|\psi_n|^2}{\lambda_n} \int\limits_0^T \sin^2(\sqrt{\lambda_n} t)\, dt \leqslant T \frac{|\psi_n|^2}{\lambda_n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|\beta_n\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\psi_n|^2 < \infty.$$

Аналогично, получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|\beta_n'\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\psi_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|\beta_n''\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\psi_n|^2 < \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) u_n(x) \in \mathcal{H}_W. \tag{9.68}$$

Наконец, заметим, что при $n \in \mathbb{N}$ верно, что

$$\|\gamma_n\|^2_{L_2(0,T)} = \int\limits_0^T \left| \int\limits_0^t f_n(\tau) \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\, d\tau \right|^2 dt \leqslant T \left(\int\limits_0^T \frac{|f_n(\tau)|}{\sqrt{\lambda_n}}\, d\tau \right)^2 =$$

$$= \frac{T}{\lambda_n} \left(\int\limits_0^T |f_n(\tau)|\, d\tau \right)^2 \leqslant \frac{T}{\lambda_n} \int\limits_0^T |f_n(\tau)|^2\, d\tau \int\limits_0^T 1\, d\tau = T^2 \frac{\|f_n\|^2_{L_2(0,T)}}{\lambda_n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|\gamma_n\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|f_n\|^2_{L_2(0,T)} < \infty.$$

Аналогично,

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \gamma_n'(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos\left(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\right)\, d\tau,$$

$$\|\gamma_n'\|^2_{L_2(0,T)} = \int\limits_0^T \left| \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos\left(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\right)\, d\tau \right|^2 dt \leqslant T \left(\int\limits_0^T |f_n(\tau)|\, d\tau \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant T \int\limits_0^T |f_n(\tau)|^2\, d\tau \int\limits_0^T 1\, d\tau = T^2 \|f_n\|^2_{L_2(0,T)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|\gamma_n'\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|f_n\|^2_{L_2(0,T)} < \infty.$$

Наконец,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \gamma_n''(t) = f_n(t) - \sqrt{\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\right)\, d\tau = f_n(t) - \lambda_n \gamma_n(t),$$

$$\|\gamma_n''\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant \|f_n\|^2_{L_2(0,T)} + \lambda_n^2 \|\gamma_n\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant \|f_n\|^2_{L_2(0,T)} + T^2 \lambda_n \|f_n\|^2_{L_2(0,T)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\gamma_n''\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^2_{L_2(0,T)} + T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|f_n\|^2_{L_2(0,T)} < \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) u_n(x) \in \mathcal{H}_W. \tag{9.69}$$

Собирая оценки (9.67), (9.68), (9.69) и разложения (9.62), (9.66) вместе, получим, что $u \in \mathcal{H}_W$.

(2 – 5) Без доказательства. □

10. Список рекомендуемой литературы

[1] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики* // М., «Наука», (1971).
[2] М. А. Шубин, *Лекции об уравнениях математической физики* // М.: МЦНМО, (2003).
[3] Г. Е. Шилов, *Математический анализ (второй специальный курс)* // М., «Наука», (1965).
[4] Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, *Лекции по теории функций комплексного переменного* // М., «Наука», (1989).
[5] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных* // М., «Наука», (1983).